Números Inteiros e Criptografia 2019.2 — Primeira prova — 24/9/2019

A prova é individual e sem consulta. Responda as questões na folha de respostas, a lápis ou a caneta. Se tiver qualquer dúvida consulte o professor. Você pode usar livremente qualquer resultado visto em sala ou em listas de exercício, mas deve escrever claramente qual é o teorema/exercício/fato sendo usado. É **proibido** o uso de celular.

JUSTIFIQUE SUAS RESPOSTAS!

Questão 1. Em um futuro distante, o presidente do Brasil é um excêntrico que decide mudar o sistema monetário. Por questões de numerologia, no novo sistema há apenas dois valores de moedas: a moeda de 561 "dinheiros" e a de 1995 "dinheiros".

(a) (2 pontos) Neste futuro distante, Fulano vai à padaria comprar uma coxinha, que custa 12 "dinheiros". Quantas moedas de cada tipo ele entrega para o caixa da padaria, e quantas de cada tipo recebe de troco, para pagar o valor exato da coxinha? (Há infinitas respostas corretas para esta questão.)

(b) (2 pontos) Mostre que é impossível Fulano comprar uma casa que custe 12312312312 "dinheiros", pagando em dinheiro vivo e recebendo troco também em dinheiro vivo, sem que o vendedor saia perdendo (porque Fulano pagou menos que o valor real da casa), nem que o Fulano saia perdendo (pois pagou mais do que o valor real da casa).

Questão 2. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, seja $\omega(n)$ o número de primos **distintos** que dividem n. Assim $\omega(2) = \omega(3) = \omega(4) = \omega(5) = 1$, mas $\omega(6) = \omega(12) = 2$.

(a) (2 pontos) Mostre que, para todos inteiros $n, m \geq 2$, temos $\omega(n \cdot m) \leq \omega(n) + \omega(m)$.

(b) (1 ponto) Mostre que a seguinte afirmação é falsa: "para todos inteiros $n, m \geq 2$, temos $\omega(n \cdot m) = \omega(n) + \omega(m)$".

(c) (2 pontos) Mostre que, para todos inteiros **coprimos** $n, m \geq 2$, temos $\omega(n \cdot m) = \omega(n) + \omega(m)$.

(d) (2 pontos) Mostre que para todo inteiro $n \geq 1$ existe um inteiro $m \geq 2$ tal que $\omega(m) = n$.