Números Inteiros e Criptografia, 2020.1

Lista de Exercícios 2

Submeta as soluções das questões marcadas com *
até 18 de dezembro às 18:00 salvando um arquivo na sua pasta no Google Drive[†]

Justifique todas as questões.

***Questão 1.** Seja X um conjunto e $\varphi(x)$ uma fórmula qualquer envolvendo a variável x. Mostre que

$$\neg[\forall x \in X(\varphi(x))] \quad \longleftrightarrow \quad \exists x \in X(\neg\varphi(x))$$

usando as definições dos quantificadores relativizados $\forall x \in X$ e $\exists x \in X$ vistas em aula.

Questão 2. Sejam X, Y e Z conjuntos. Prove as seguintes afirmações.

a. Temos $X \subseteq Y$ sse $\forall x \in X(x \in Y)$;

b. Não é possível que ambos $X \subset Y$ e $Y \subseteq X$ sejam verdadeiros.

* **c.** Se $X \subseteq Y$, então $\wp(X) \subseteq \wp(Y)$.

* **d.** Temos $X \subseteq Y$ sse $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Z) \cap Y$.

***Questão 3.** Mostre que se A, B, C, X são conjuntos tais que

- $A, B, C \subseteq X$,
- $A \cap B = A \cap C$ e
- $(X \setminus A) \cap B = (X \setminus A) \cap C$,

então $B = C$.

Questão 4. Exiba conjuntos X e Y, com $X \neq \varnothing$, tais que ambos $X \in Y$ e $X \subseteq Y$ sejam verdadeiros.

Questão 5. Sejam X e Y conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo para cada uma das afirmações abaixo:

* **a.** $\wp(X \cap Y) = \wp(X) \cap \wp(Y)$.

* **b.** $\wp(X \cup Y) = \wp(X) \cup \wp(Y)$.

[†]Link recebido por email em 4/12/2020. A pasta tem um nome similar a `<seu nome> - Cripto 2020.1 - Submissões e Feedback`; em caso de qualquer dúvida entre em contato com o professor.

c. Para qualquer conjunto Z, temos $Z \in \wp(X)$ sse $\wp(Z) \subseteq \wp(X)$.

Questão 6. Sejam X, Y e Z conjuntos. Prove cada uma das afirmações abaixo.

* **a.** $X \subseteq (Y \cap Z)$ sse ($X \subseteq Y$ e $X \subseteq Z$).

b. $(X \cup Y) \subseteq Z$ sse ($X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$).

* **c.** $X \subseteq Y$ sse $X \cup Y = Y$ sse $X \cap Y = X$
(Atenção! Aqui temos duas afirmações separadas, uma para cada *sse*.)

d. $\varnothing \subseteq X$

* **e.** Se $X, Y \subseteq Z$, então: $[X \subseteq Y$ sse $(Z \smallsetminus Y) \subseteq (Z \smallsetminus X)]$

Questão 7. A relação de *divisibilidade* entre números naturais é definida por: n *divide* m se (e somente se) a divisão de m por n tem resultado inteiro, sem deixar resto (atenção à ordem das palavras na frase).

Desenhe o diagrama da relação de divisibilidade dos números de 0 a 19.

Questão 8. Considere as 4 relações R, S, T, U definidas em um mesmo conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ de 5 elementos distintos, definidas extensionalmente pelas tabelas abaixo.

R	a	b	c	d	e
a	V	F	V	F	F
b	V	V	F	V	F
c	V	V	F	V	V
d	V	F	F	V	V
e	V	V	V	V	V

S	a	b	c	d	e
a	V	V	V	V	V
b	V	V	V	V	V
c	V	V	V	V	V
d	V	V	V	V	V
e	V	V	V	V	V

T	c	b	a	e	d
c	F	V	V	V	V
b	F	V	V	F	V
a	V	F	V	F	F
e	V	V	V	V	V
d	F	F	V	V	V

U	a	b	c	d	e
a	F	F	F	F	F
b	F	F	F	F	F
c	F	F	F	F	F
d	F	F	F	F	F
e	F	F	F	F	F

* **a.** Diga quais das relações definidas são iguais e quais são diferentes entre si (e prove cada um dos 6 casos).

b. Diga quais das relações definidas são reflexivas e quais não são (e prove cada um dos 4 casos).

c. Diga quais das relações definidas são simétricas e quais não são (e prove cada um dos 4 casos).

* **d.** Assumindo que a ordem em que os elementos aparecem nas linhas é a mesma em que aparecem nas colunas, como você determina se uma relação é reflexiva dada sua representação em tabela?

* **e.** Assumindo que a ordem em que os elementos aparecem nas linhas é a mesma em que aparecem nas colunas, como você determina se uma relação é simétrica dada sua representação em tabela?