

Números Inteiros e Criptografia, 2020.2

Lista de Exercícios 1[†]

Submeta as soluções das questões marcadas com * até 12 de abril às 18:00 salvando um arquivo na sua pasta no Google Drive[‡]

Questão 1. Modele as afirmações em português a seguir usando os símbolos lógicos vistos em aula. Observe os exemplos.

Exemplo. “Se fizer sol e eu não tiver que estudar, eu vou tomar sol na janela”.

Usando S : “fizer sol”, E : “eu tiver que estudar”, J : “vou tomar sol na janela”, podemos modelar a afirmação da seguinte forma:

$$(S \wedge \neg E) \rightarrow J.$$

Exemplo. “Nem todo brasileiro gosta de samba e futebol, e os que gostam de futebol nem sempre são flamenguistas”

Assumindo que os valores possíveis para a variável x são todas as pessoas, e usando $B(x)$: “ x é brasileiro”, $S(x)$: “ x gosta de samba”, $F(x)$: “ x gosta de futebol” e $M(x)$: “ x é flamenguista”, podemos modelar a afirmação da seguinte forma:

$$\exists x[B(x) \wedge (\neg S(x) \vee \neg F(x))] \wedge \exists x[B(x) \wedge F(x) \wedge \neg M(x)].$$

a. Sempre que um número inteiro é par e maior que 2, ele é a soma de dois primos.

* b. Todo dia eu como manga ou tomo leite, mas nunca ambos no mesmo dia.

Questão 2. Usando tabelas de verdade, mostre que as seguintes fórmulas são sempre verdadeiras:

* a. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

* b. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$

c. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \longleftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

d. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

e. $[\neg(p \wedge q)] \longleftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$

f. $[\neg(p \vee q)] \longleftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$

[†]Publicada em 1/4; modificada em 8/4 (mudando data de submissão)

[‡]Link recebido por email em 1/4/2021. A pasta tem um nome similar a <seu nome> - Cripto 2020.2 - Submissões e Feedback; em caso de qualquer dúvida entre em contato com o professor.

g. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Questão 3. Usando apenas os conectivos e os quantificadores vistos em sala (“para todo” e “existe pelo menos um”), escreva fórmulas que expressem os seguintes outros “quantificadores”. Observe o exemplo.

Exemplo. “Existe um único elemento no universo que satisfaz φ ”.

$$\exists x(\varphi(x)) \wedge \forall y\forall z[(\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \rightarrow y = z].$$

- * a. Existem pelo menos dois elementos no universo que satisfazem φ .
- * b. Existem no máximo dois elementos no universo que satisfazem φ .
- c. Existem exatamente dois elementos no universo que satisfazem φ .

Questão 4. Escreva as negações das seguintes afirmações em português. Em cada caso, tente colocar a(s) palavra(s) negativas o mais próximas o possível de afirmações simples, evitando expressões como “não existe . . .”, “não é o caso que para todo . . .”, etc.

- a. Existe um número inteiro que é primo ou igual a 15.
- b. Todo número real é o resultado da divisão de dois inteiros.
- * c. Para qualquer número real não-nulo x existe um número real y tal que o produto de x e y é igual a 1.

Questão 5. Suponha que os possíveis valores para as variáveis x e y sejam todas os carros. Considerando que $R(x, y)$ significa “ x é pelo menos tão rápido quanto y ”, $C(x, y)$ significa “ x é pelo menos tão caro quanto y ” e $V(x, y)$ significa “ x é pelo menos tão velho quanto y ”, traduza as fórmulas abaixo para o português (tente formular suas frases da forma mais natural possível):

- a. $\forall x\exists y[V(y, x) \wedge C(y, x) \wedge R(x, y)]$
- b. $\exists x\forall y(V(y, x))$
- * c. $\neg[\forall x\forall y(R(x, y) \leftrightarrow C(x, y))]$

***Questão 6.** Seja x um número complexo. Dizemos que x é *supimpa* se ele é intenso e para todo número natural n existe algum número real y tal que y^2 aglutina x pela esquerda ou $y + n$ aglutina \sqrt{x} pela direita. Dê a caracterização exata dos números complexos não-supimpas, escrita da forma mais natural que você conseguir.