Números Inteiros e Criptografia, 2020.2

Lista de Exercícios 4[†]

Submeta as soluções das questões marcadas com *
até 6 de maio às 18:00 salvando um arquivo na sua pasta no Google Drive[‡]

Questão 1. Para cada par a, b de números naturais abaixo, calcule o seu máximo divisor comum.

a. 14 e 35

b. 252 e 180

c. 6643 e 2873

d. 272828282 e 3242

Questão 2. O mínimo múltiplo comum de inteiros a e b é o menor inteiro positivo que é múltiplo de ambos a e b. Vamos denotar esse número por $\mathrm{mmc}(a, b)$. Prove as seguintes afirmações.

*** a.** Se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então $\mathrm{mmc}(a, b) \cdot \mathrm{mdc}(a, b) = ab$.

Dica: mostre separadamente que $\mathrm{mmc}(a, b) \cdot \mathrm{mdc}(a, b) \geq a \cdot b$ e $\mathrm{mmc}(a, b) \cdot \mathrm{mdc}(a, b) \leq a \cdot b$. Lembre-se: $\mathrm{mdc}(a, b)$ é definido como o *máximo* ..., o que nos dá uma estratégia para concluirmos que $\mathrm{mdc}(a, b)$ é maior ou igual a um dado inteiro; analogamente, $\mathrm{mmc}(a, b)$ é definido como o *mínimo* ..., o que nos dá uma estratégia para concluirmos que $\mathrm{mmc}(a, b)$ é menor ou igual a um dado inteiro. Em uma dessas provas, utilize o item **c** abaixo (você pode usá-lo mesmo se não conseguir prová-lo).

*** b.** $\mathrm{mmc}(a, b) = ab$ sse $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$.

*** c.** Para qualquer natural m, temos ($a \mid m$ e $b \mid m$) sse $\mathrm{mmc}(a, b) \mid m$. (Dica: para a direção "$\Rightarrow$", imagine a divisão inteira de m por $\mathrm{mmc}(a, b)$. O que de impossível teria que acontecer se o resto dessa divisão não fosse 0?)

Questão 3. O Algoritmo Euclidiano funciona tão bem que é difícil encontrar pares de números que o fazem demorar muito.

*** a.** Encontre dois números cujo mdc é 2, para os quais o Algoritmo Euclidiano efetua exatamente 5 divisões.

[†] Publicada em 27/4; nova versão em 28/4 (corrigindo erro de digitação na Questão 6b)

[‡] Link recebido por email em 1/4/2021. A pasta tem um nome similar a `<seu nome> - Cripto 2020.2 - Submissões e Feedback`; em caso de qualquer dúvida entre em contato com o professor.

*** b.** Encontre dois números cujo mdc é 2, para os quais o Algoritmo Euclidiano efetua exatamente 6 divisões (dica: estenda a ideia que você usou na letra **a**).

*** c.** Descreva um método para resolver o seguinte problema: dado um natural k, encontrar dois números cujo mdc é 2, para os quais o Algoritmo Euclidiano efetua exatamente k divisões.

Questão 4. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Prove cada uma das afirmações abaixo:

a. $\text{mdc}(n, 2n + 1) = 1$

b. $\text{mdc}(2n + 1, 3n + 1) = 1$

c. $\text{mdc}(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$

Questão 5. Em Brasilândia, o jogo de basquete é jogado com regras diferentes. Existem apenas dois tipos de pontuações para as cestas: 5 e 11 pontos. É possível uma pontuação entre dois times de 86×39?

Questão 6. Em um futuro distante, o presidente do Brasil é um excêntrico que decide mudar o sistema monetário. Por questões de numerologia, no novo sistema há apenas dois valores de moedas: a moeda de 561 "dinheiros" e a de 1995 "dinheiros".

*** a.** Neste futuro distante, Fulano vai à padaria comprar uma coxinha, que custa 12 "dinheiros". Quantas moedas de cada tipo ele entrega para o caixa da padaria, e quantas de cada tipo recebe de troco, para pagar o valor exato da coxinha? (Há infinitas respostas corretas para esta questão.)

*** b.** Mostre que é impossível Fulano comprar uma casa que custe 1231231231 "dinheiros", pagando em dinheiro vivo e recebendo troco também em dinheiro vivo, sem que o vendedor saia perdendo (porque Fulano pagou menos que o valor real da casa), nem que o Fulano saia perdendo (pois pagou mais do que o valor real da casa).