Números Inteiros e Criptografia, 2020.2

Lista de Exercícios 5[†]

Submeta as soluções das questões marcadas com *
até 17 de maio às 18:00 salvando um arquivo na sua pasta no Google Drive[‡]

***Questão 1.** Determine se existem naturais $x, y, z > 0$ que satisfaçam a equação $2^x \cdot 3^4 \cdot 22^y = 66^z$.

Questão 2.

*** a.** Seja $k > 1$ um inteiro. Mostre que todos os números $k!+2, k!+3, \ldots, k!+k$ são compostos.

*** b.** Refute a afirmação:

"existe um inteiro positivo m tal que, dentre quaisquer m inteiros positivos consecutivos, sempre há pelo menos um primo".

Questão 3.

a. Sejam b_1 e b_2 inteiros positivos primos entre si. Mostre que d é um divisor de $b_1 b_2$ sse $d = d_1 d_2$ onde $d_1 = \text{mdc}(d, b_1)$ e $d_2 = \text{mdc}(d, b_2)$.

b. Dado um natural $n > 0$, seja $S(n)$ a soma de todos os divisores naturais de n. Por exemplo, $S(2) = 1+2 = 3$, $S(3) = 1+3 = 4$ e $S(6) = 1+2+3+6 = 12$. Use o item anterior para mostrar que se b_1 e b_2 são inteiros positivos primos entre si então $S(b_1 b_2) = S(b_1)S(b_2)$.

Questão 4. Nesta questão vamos determinar relações entre as fatorações em primos de inteiros positivos a e b com as fatorações em primos de $\text{mdc}(a, b)$ e $\text{mmc}(a, b)$.

a. Sendo $a = 2^{35} \cdot 5^{47} \cdot 101^3$ e $b = 2^{23} \cdot 5^{50} \cdot 43^2$, determine $\text{mdc}(a, b)$ e $\text{mmc}(a, b)$.

*** b.** Descreva um algoritmo que receba as fatorações em primos de dois números naturais $a, b \geq 2$ como entrada e retorne as fatorações em primos de $\text{mdc}(a, b)$ e $\text{mmc}(a, b)$. Aqui, "receber" as fatorações como entrada significa que você pode assumir que tem acesso aos primos

c. Sendo $a, b, c \geq 2$ naturais, prove que se $\text{mdc}(a, c) = \text{mdc}(b, c) = 1$ então $\text{mdc}(ab, c) = 1$. (*Dica*: use a sua ideia do item (b))

[†]Publicada em 6/5

[‡]Link recebido por email em 1/4/2021. A pasta tem um nome similar a `<seu nome> - Cripto 2020.2 - Submissões e Feedback`; em caso de qualquer dúvida entre em contato com o professor.

d. Sendo $a, b \geq 2$ naturais, e **baseando-se na sua ideia do item (b) acima**, prove que $a \cdot b = \mathrm{mdc}(a, b) \cdot \mathrm{mmc}(a, b)$.

Questão 5. Seja n um inteiro positivo. Determine todos os fatores primos de $n!$.

Questão 6. Dado um inteiro positivo n, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n.

Dizemos que um inteiro positivo n é *altamente composto* se $d(m) < d(n)$ é verdade para todo inteiro positivo $m < n$. Por exemplo, como $d(1) = 1$, $d(2) = 2 = d(3)$ e $d(4) = 3$, temos que 1, 2 e 4 são altamente compostos mas 3 não é.

*** a.** Implemente em Python uma função que, tendo como entrada um inteiro positivo n, retorna a lista de todos os números altamente compostos menores ou iguais a n. (Nota: submeta sua solução adicionando o arquivo-fonte `.py` à sua pasta no Drive.)

*** b.** Determine quantos números inteiros positivos altamente compostos existem até (incluindo, se for o caso) 5000.

Questão 7. Dizemos que um número real x é *racional* se existem inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $x = \frac{a}{b}$.

*** a.** Seja $a \geq 2$ um número natural. Se a decomposição de a em fatores primos é

$$a = \prod_{i=0}^{k} p_i^{e_i}$$

qual é a decomposição em fatores primos de a^2?

*** b.** Prove o seguinte teorema.

Teorema. *Para todo natural n, temos:*

$\sqrt{n}$ é um número racional sse n é um quadrado perfeito (isto quer dizer: $\sqrt{n}$ é um número natural).

Dica: Se $\sqrt{n} > 0$ é racional, então $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ para algum par de naturais não nulos a, b. Logo $n = \frac{a^2}{b^2}$. Pela questão 8a, o que se sabe sobre as fatorações em primos de a^2 e b^2? O que isso implica sobre a fatoração em primos de n?