Números Inteiros e Criptografia, PLE 2020

Lista de Exercícios 2

Submeta as soluções das questões marcadas com *
até 8 de setembro às 8:00 salvando um arquivo na sua pasta no Google Drive (link recebido por email em 1º de setembro)†

Justifique todas as questões.

Questão 1. Sejam X e Y conjuntos. Prove as seguintes afirmações.

a. Não é possível que ambos $X \subset Y$ e $Y \subseteq X$ sejam verdadeiros.

b. Se $X \subseteq Y$, então $\wp(X) \subseteq \wp(Y)$.

* **c.** Temos $X \subseteq Y$ sse $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Z) \cap Y$.

***Questão 2.** Se $A, B, C \subseteq X$ são conjuntos tais que $A \cap B = A \cap C$ e $(X \setminus A) \cap B = (X \setminus A) \cap C$, então $B = C$.

Questão 3. Exiba conjuntos X e Y, com $X \neq \varnothing$, tais que ambos $X \in Y$ e $X \subseteq Y$ sejam verdadeiros.

Questão 4. Sejam X e Y conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo para cada uma das afirmações abaixo:

a. $\wp(X \cap Y) = \wp(X) \cap \wp(Y)$.

b. $\wp(X \cup Y) = \wp(X) \cup \wp(Y)$.

c. Para qualquer conjunto Z, temos $Z \in \wp(X)$ sse $\wp(Z) \subseteq \wp(X)$.

Questão 5. Sejam X, Y e Z conjuntos. Prove cada uma das afirmações abaixo.

* **a.** $X \subseteq Y \cap Z$ sse $(X \subseteq Y$ e $X \subseteq Z)$.

b. $X \cup Y \subseteq Z$ sse $(X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z)$.

* **c.** $X \subseteq Y$ sse $X \cup Y = Y$ sse $X \cap Y = X$ (Atenção! Aqui temos duas afirmações separadas, uma para cada *sse*.)

d. $\varnothing \subseteq X$

e. Se $X, Y \subseteq Z$, então: $[X \subseteq Y$ sse $(Z \setminus Y) \subseteq (Z \setminus X)]$

Questão 6. Dê um exemplo de uma relação não-vazia no conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ que tenha as seguintes propriedades (ou informe se não for possível):

† A pasta tem um nome similar a `Cripto - Submissões e Feedback - <seu nome aqui>`; em caso de qualquer dúvida entre em contato com os professores.

a. simétrica e transitiva

b. simétrica e não-transitiva

c. reflexiva, não-simétrica e transitiva

d. reflexiva, não-simétrica e não-transitiva

* **e.** reflexiva, simétrica e não-transitiva

Questão 7. Para cada item abaixo, dê um exemplo de uma relação que *não* é:

a. associativa

b. reflexiva

c. transitiva

Questão 8. Desenhe o diagrama da relação de inclusão do conjunto de subconjuntos de {"óculos", "sorrindo", "chapéu", "barba"}.

Questão 9. Desenhe o diagrama da relação de divisibilidade dos números de 0 a 19.

Questão 10. Informalmente, determine se as relações abaixo, definidas no conjunto de todas as pessoas do mundo, são ou não de cada um desses tipos: reflexivas, simétricas e/ou transitivas.

a. $\{(a, b) \mid a$ é mais alto do que $b\}$

b. $\{(a, b) \mid a$ nasceu no mesmo dia que $b\}$

c. $\{(a, b) \mid a$ é parente de $b\}$

d. $\{(a, b) \mid a$ é antepassado de $b\}$

e. $\{(a, b) \mid a$ conhece (sabe quem é) $b\}$

Questão 11. Diremos que dois números inteiros "estão próximos" entre si sse o valor absoluto da diferença entre eles for menor ou igual a 2. Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Representemos por R esta relação.

* **a.** Dê a definição de R em notação de construção de conjuntos $\{\ldots \mid \ldots\}$.

* **b.** Prove ou refute: R é reflexiva.

* **c.** Prove ou refute: R é simétrica.

* **d.** Prove ou refute: R é transitiva.

Questão 12. Prove que (para todos os números naturais):

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b.$$

***Questão 13.** Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 números naturais. Prove o seguinte teorema: se $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$, então $x_1 \leq 1$ ou $x_2 \leq 1$ ou $x_3 \leq 1$ ou $x_4 \leq 1$.

Questão 14. Escreva a função de valor absoluto usando somente a função de máximo.

Questão 15. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$. Seja g a relação de A em B definida assim: $g = \{(1, 8), (2, 5), (3, 6), (?, ?)\}$. Para cada item abaixo, proponha uma forma de substituir as duas interrogações, de modo a tornar verdadeira cada afirmação abaixo:

a. A relação g não é uma função

b. A relação g é uma função de A em B, mas não é injetiva

c. A relação é uma bijeção (função bijetiva) de A em B

Questão 16. Considerando que $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, liste os pares ordenados das relações de A em B descritas abaixo.

a. $R = \{(a, b) \mid a = b\}$

b. $R = \{(a, b) \mid a < b\}$

c. $R = \{(a, b) \mid a + b = 4\}$

Questão 17. Como podemos formalizar na linguagem de conjuntos a relação entre o conjunto de CPFs dos brasileiros e o conjunto de brasileiros. A relação que você formalizou é uma função? É determinística? É total? É sobrejetiva? É injetiva?

Questão 18. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é definida como $f(x) =$ quantidade de números naturais que dividem x. Por exemplo, $f(6) = 4$ porque $1, 2, 3, 6$ são todos os naturais que dividem 6.

a. f é injetiva?

b. f sobrejetiva?

Questão 19. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Escreva todas as funções $f : A \to B$ possíveis. Diga quais são injetivas e quais são sobrejetivas, se houver alguma. Suponha agora que A tem n elementos e B tem m elementos. Quantas funções teríamos nesse caso?

Questão 20. Considere a função $f : \mathbb{Z}^+$(números inteiros positivos)$\to \mathbb{Z}$ definida abaixo:

$f(x) = \frac{x}{2}$ se x for par e $f(x) = \frac{-(x-1)}{2}$ se x for ímpar

*** a.** Prove que f é injetiva. (Dica: faça uma prova em quatro casos considerando as possíveis paridades dos elementos do domínio).

*** b.** Prove que f é sobrejetiva. (Dica: faça uma prova por casos, considerando os sinais do elemento do contradomínio).