

Números Inteiros e Criptografia, PLE 2020

Lista de Exercícios 8

Submeta as soluções das questões marcadas com *
até **23 de outubro às 18:00** salvando um arquivo na sua pasta
no Google Drive[†]

Justifique todas as questões.

Questão 1. Dados $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, chamamos de *forma reduzida de $a \pmod{n}$* o único $b \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ que satisfaz $b \equiv a \pmod{n}$.

Calcule a forma reduzida de cada item abaixo:

- a. $(-99999!)^{99999!} \pmod{1}$
- b. $2351 \pmod{2}$
- * c. $-(1234567890^{99999!}) \pmod{2}$
- d. $50121 \pmod{13}$
- e. $321671 \pmod{14}$
- f. $5^{20} \pmod{7}$
- * g. $7^{1001} \pmod{11}$
- * h. $2^{130} \pmod{263}$
- i. $13^{221} \pmod{19}$

Questão 2. Prove que, para todos $a, b, n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, temos:

b é a forma reduzida de $a \pmod{n}$

sse

b é o resto da divisão de a por n .

Questão 3. Determine o resto da divisão de

- a. $3^{(2^{1024})}$ por 31.
- b. $3^{19!}$ por 307.
- * c. $39^{50!}$ por 2251.
- d. 2^{78654} por 137.

[†]Link recebido por email em 1/9/2020 ou 17/9/2020. A pasta tem um nome similar a **Cripto - Submissões e Feedback** - <seu nome>; em caso de qualquer dúvida entre em contato com os professores.

- e. 34^{642} por 12.
- f. $3^{(1034^2)}$ por 1033.
- * g. $2^{987657} + 5^{15}$ por 65.
- h. $3^{(5^{2014})}$ por 29.
- i. $2^{250!} + 5^{450!}$ por 129.
- * j. $1000!$ por 3^{300} .

Questão 4. Determine o inverso multiplicativo de

- a. 137 módulo 2887.
- * b. 12453 módulo 331.

***Questão 5.** Prove **por indução** que, para todo inteiro $n \geq 1$, temos $n^3 \equiv n \pmod{6}$.

Questão 6. Usando aritmética modular, determine um inteiro x tal que

$$12435x + 798y = 3$$

para algum y inteiro.

***Questão 7.** São oito horas da manhã. Que horas serão daqui a $243^{213!}$ horas?

Questão 8. Determine x tal que $\overline{7085}x + \overline{50000!} = \overline{23}$ em \mathbb{Z}_{8856} .

Questão 9. Sabe-se que $\overline{3}^{(2^7)} = \overline{256}$ em \mathbb{Z}_{257} .

- a. Calcule o menor inteiro $k > 0$ tal que $3^k \equiv 1 \pmod{257}$.
- b. Calcule o resto da divisão de 3^{2307} por 257.

***Questão 10.** Seja $p > 1200$ um fator primo de $1200! + 1$. $\overline{1200}$ tem inverso em \mathbb{Z}_p ? Se existir, qual é o seu inverso em \mathbb{Z}_p ?

Questão 11. Determine:

- a. o inverso de $\overline{71}$ em \mathbb{Z}_{8635} , se existir.
- b. o resto da divisão de $2^{(2^{21})}$ por 71.
- c. o resto da divisão de $2^{987657} + 5^{15}$ por 65.

Questão 12. Determine:

- * a. o inverso de 137 módulo 2887;
- * b. x tal que $137x \equiv 544 \pmod{2887}$, usando o item anterior.

Questão 13. Prove, por indução em n , que se $n \geq 2$ então $2^{(3^{n-2})} \equiv 3^{n-1} - 1 \pmod{3^n}$.

Questão 14.

* **a.** Prove que para todo inteiro $b > 0$, se b não é divisível por 7 então $b^6 \equiv 1 \pmod{7}$. (*Dica:* prove separadamente para cada $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e mostre que isso implica o resultado desejado. *Outra dica:* Na verdade, como o expoente 6 é par, mostre que basta provar separadamente para cada $b \in \{1, 2, 3\}$, mostrar que isso implica o resultado desejado para cada $b \in \{4, 5, 6\}$, e daí seguir a primeira dica.)

* **b.** Calcule o resto da divisão de

$$1^{1!} + 2^{2!} + 3^{3!} + 4^{4!} + 5^{5!} + 6^{6!} + 7^{7!} + 8^{8!} + 9^{9!} + 10^{10!}.$$

por 7. (*Dica:* use o item anterior.)

***Questão 15.** Considere um natural n com seis dígitos a, b, c, d, e, f , sendo que $n = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10^1 + f \cdot 10^0$. Mostre que n é divisível por 33, se $ab + cd + ef$ é divisível por 33. Por exemplo, $n = 653202$ é divisível por 33, pois $65 + 32 + 2$ é divisível por 33.

Questão 16. Considere as relações R_1 e R_2 abaixo, definidas no conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros. Determine se são reflexivas, simétricas e/ou transitivas. Alguma das duas relações é de equivalência?

* **a.** $a R_1 b$ quando $\text{mdc}(a, b) = 1$.

* **b.** Fixe $n > 0$ inteiro. Então $a R_2 b$ quando $\text{mdc}(a, n) = \text{mdc}(b, n)$.

Questão 17. Quais os elementos de \mathbb{Z}_4 que têm inversos? E de \mathbb{Z}_{11} ? E de \mathbb{Z}_{15} ? Calcule os inversos desses elementos em cada caso.

Questão 18. Usando o conceito de inverso multiplicativo, determine uma solução para x em cada uma das seguintes equações, se existir, ou prove que não existe solução:

a. $4x \equiv 3 \pmod{4}$.

b. $3x + 2 \equiv 0 \pmod{4}$.

c. $2x - 1 \equiv 7 \pmod{15}$

Questão 19. Ache um elemento a de \mathbb{Z}_{34} de modo que todo elemento invertível de \mathbb{Z}_{34} seja uma potência de a .

Questão 20. O objetivo desta questão (i.e., o que vamos concluir após os itens **a**, **b** e **c** abaixo) é mostrar que nenhum número da forma $4n + 3$ pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros.

* **a.** Mostre que o quadrado de qualquer inteiro só pode ser congruente a 0 ou 1 módulo 4.

* **b.** Use o item anterior para mostrar que se x e y são inteiros então $x^2 + y^2$ só pode ser congruente a 0, 1 ou 2 módulo 4.

* **c.** Use o item anterior para mostrar que um inteiro da forma $4n + 3$ não pode ser escrito como soma de dois quadrados de inteiros. Este resultado é um caso particular de um teorema comunicado por Fermat em uma carta a Roberval datada de 1640. Fermat também sabia que qualquer primo da forma $4n + 1$ pode ser escrito como soma de dois quadrados de inteiros.