Números Inteiros e Criptografia, 2021.1

Lista de Exercícios 2[†]

Submeta as soluções das questões marcadas com * salvando um arquivo na sua pasta no Google Drive[‡]

Data limite para entrega: **10 de setembro** às 18:00.

Em qualquer questão, você pode usar tudo que foi visto em aula (a não ser que a questão proíba isso) ou qualquer outro exercício das listas, desde que seja claro na sua referência do resultado que está usando, e desde que não crie dependências circulares.

***Questão 1.** Determine se existem naturais $x, y, z > 0$ que satisfaçam a equação $2^x \cdot 3^4 \cdot 22^y = 66^z$.

Questão 2.

a. Seja $k \geq 2$ um natural. Mostre que todos os números $k!+2, k!+3, \ldots, k!+k$ são compostos.

b. Refute a afirmação:

"existe um natural m tal que, dentre quaisquer m naturais consecutivos, sempre há pelo menos um primo".

Questão 3. Seja $n \geq 2$ um natural. Determine todos os fatores primos de $n!$.

Questão 4. Dado um natural $n > 0$, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n.

Dizemos que um natural $m > 0$ é *altamente composto* se $d(k) < d(m)$ é verdade para todo natural positivo $k < m$. Por exemplo, como $d(1) = 1$, $d(2) = 2 = d(3)$ e $d(4) = 3$, temos que 1, 2 e 4 são altamente compostos mas 3 não é.

*** a.** Implemente em Python uma função que, tendo como entrada um inteiro positivo n, retorna a lista de todos os números altamente compostos menores ou iguais a n. (Nota: submeta sua solução adicionando o arquivo-fonte `.py` à sua pasta no Drive.)

*** b.** Determine quantos números inteiros positivos altamente compostos existem até (incluindo, se for o caso) 5000.

[†]Publicada em 24/8. Atualizada em 1/9, corrigindo enunciado da Q4.

[‡]Link recebido por email em 5/8/2021. A pasta tem um nome similar a `<seu nome> - Cripto 2021.1 - Submissões e Feedback`; em caso de qualquer dúvida entre em contato com o professor.

Questão 5. Dizemos que um número real x é *racional* se existem inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $x = \frac{a}{b}$.

a. Seja $a \geq 2$ um número natural. Se a decomposição de a em fatores primos é

$$a = \prod_{i=0}^{k} p_i^{e_i}$$

qual é a decomposição em fatores primos de a^2?

b. Prove o seguinte teorema.

Teorema. *Para todo natural n, temos:*
$\sqrt{n}$ é um número racional sse $\sqrt{n}$ é um número natural.

Dica: Se $\sqrt{n} > 0$ é racional, então $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ para algum par de naturais não nulos a, b. Logo $n = \frac{a^2}{b^2}$. Pela questão 5(a), o que se sabe sobre as fatorações em primos de a^2 e b^2? O que isso implica sobre a fatoração em primos de n?

Questão 6.

*** a.** Sejam b_1 e b_2 naturais primos entre si, i.e., tais que $\mathrm{mdc}(b_1, b_2) = 1$. Mostre que um natural d é um divisor de $b_1 b_2$ sse $d = d_1 d_2$ onde $d_1 = \mathrm{mdc}(d, b_1)$ e $d_2 = \mathrm{mdc}(d, b_2)$.

*** b.** Dado um natural $n > 0$, seja $S(n)$ a soma de todos os divisores naturais de n. Por exemplo, $S(2) = 1+2 = 3$, $S(3) = 1+3 = 4$ e $S(6) = 1+2+3+6 = 12$. Mostre que se b_1 e b_2 são naturais positivos primos entre si então $S(b_1 b_2) = S(b_1)S(b_2)$. (*Dica:* use o item anterior.)

***Questão 7.** Considere as seguintes funções definidas para naturais positivos:

- $\omega(n)$ = número de fatores primos de n *distintos.*
- $\Omega(n)$ = número de fatores primos de n *contando todas as repetições!*
- $d(n)$ = quantidade de divisores naturais de n
- $S(n)$ = soma dos divisores naturais de n
- $h(n) = n^{123456789}$
- $j(n) = 123456789 \cdot n$

Exemplos de valores das funções ω, Ω, d, S estão dados na tabela abaixo:

n	fatoração em primos	$\omega(n)$	$\Omega(n)$	divisores	$d(n)$	$S(n)$
1	—	0	0	1	1	1
2	2	1	1	1, 2	2	3
3	3	1	1	1, 3	2	4
4	2^2	1	2	1, 2, 4	3	7
8	2^3	1	3	1, 2, 4, 8	4	15
15	$3 \cdot 5$	2	2	1, 3, 5, 15	4	24
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	3	5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120	16	360

Dizemos que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é:

- *aditiva* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\text{se } \operatorname{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *completamente aditiva* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *multiplicativa* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\text{se } \operatorname{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

- *completamente multiplicativa* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

Para cada uma das funções ω, Ω, d, S, h e j definidas acima, e para cada uma das propriedades *aditiva*, *completamente aditiva*, *multiplicativa* e *completamente multiplicativa*, diga se a função tem a propriedade ou não, provando cada caso positivo e dando um contra-exemplo para cada caso negativo. (*Dica:* poupe um pouco do seu trabalho notando que uma função ser *completamente aditiva* já implica que ela seja *aditiva* [qual a contrapositiva dessa implicação?], e analogamente para *completamente multiplicativa* e *multiplicativa*.)