

# Números Inteiros e Criptografia, 2021.2

## Lista de Exercícios 3

Submeta as soluções das questões marcadas com \* salvando um arquivo na sua pasta no Google Drive<sup>†</sup>

Data limite para entrega: **31/1 às 18:00**

Em qualquer questão, você pode usar tudo que foi visto em aula (a não ser que a questão proíba isso) ou qualquer outro exercício das listas, desde que seja claro na sua referência do resultado que está usando, e desde que não crie dependências circulares.

**\*Questão 1.** Determine se existem naturais  $x, y, z > 0$  que satisfaçam a equação  $3^x \cdot 5^4 \cdot 39^y = 195^z$ .

**Questão 2.**

a. Seja  $k \geq 2$  um natural. Mostre que todos os números  $k!+2, k!+3, \dots, k!+k$  são compostos.

b. Refute a afirmação:

“existe um natural  $m$  tal que, dentre quaisquer  $m$  naturais consecutivos, sempre há pelo menos um primo”.

**Questão 3.** Seja  $n \geq 2$  um natural. Determine todos os fatores primos de  $n!$ .

**Questão 4.** Dado um natural  $n > 0$ , seja  $d(n)$  o número de divisores positivos de  $n$ .

Dizemos que um natural  $m > 0$  é *altamente composto* se  $d(k) < d(m)$  é verdade para todo natural positivo  $k < m$ . Por exemplo, como  $d(1) = 1$ ,  $d(2) = 2 = d(3)$  e  $d(4) = 3$ , temos que 1, 2 e 4 são altamente compostos mas 3 não é.

\* a. Implemente em Python uma função que, tendo como entrada um inteiro positivo  $n$ , retorna a lista de todos os números altamente compostos menores ou iguais a  $n$ . (Nota: submeta sua solução adicionando o arquivo-fonte `.py` à sua pasta no Drive.)

\* b. Determine quantos números inteiros positivos altamente compostos existem até (incluindo, se for o caso) 5000.

**Questão 5.** Dizemos que um número real  $x$  é *racional* se existem inteiros  $a, b$ , com  $b \neq 0$ , tais que  $x = \frac{a}{b}$ .

---

<sup>†</sup>Link recebido por email em 8/12/2021. A pasta tem um nome similar a <seu nome> - **Cripto 2021.2 - Submissões e Feedback**; em caso de qualquer dúvida entre em contato com o professor.

a. Seja  $a \geq 2$  um número natural. Se a decomposição de  $a$  em fatores primos é

$$a = \prod_{i=0}^k p_i^{e_i}$$

qual é a decomposição em fatores primos de  $a^2$ ?

b. Prove o seguinte teorema.

**Teorema.** Para todo natural  $n$ , temos:

$\sqrt{n}$  é um número racional sse  $\sqrt{n}$  é um número natural.

Dica: Se  $\sqrt{n} > 0$  é racional, então  $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$  para algum par de naturais não nulos  $a, b$ . Logo  $n = \frac{a^2}{b^2}$ . Pela questão 5(a), o que se sabe sobre as fatorações em primos de  $a^2$  e  $b^2$ ? O que isso implica sobre a fatoração em primos de  $n$ ?

\***Questão 6.** Sejam  $b_1$  e  $b_2$  naturais primos entre si, i.e., tais que  $\text{mdc}(b_1, b_2) = 1$ . Mostre que um natural  $d$  é um divisor de  $b_1 b_2$  sse  $d = \text{mdc}(d, b_1) \cdot \text{mdc}(d, b_2)$ .

\***Questão 7.** Considere as seguintes funções definidas para naturais positivos:

- $\omega(n)$  = número de fatores primos de  $n$  distintos.
- $\Omega(n)$  = número de fatores primos de  $n$  contando todas as repetições!
- $d(n)$  = quantidade de divisores naturais de  $n$ .
- $S(n)$  = soma dos divisores naturais de  $n$ .
- $X(n) = n^{1234}$
- $Y(n) = 1234 \cdot n$

(A letra  $\omega$  se chama “ômega minúsculo” e a letra  $\Omega$  se chama “ômega maiúsculo”).

Exemplos de valores das funções  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $d$ ,  $S$  estão dados na tabela abaixo:

$n$	fatoração em primos	$\omega(n)$	$\Omega(n)$	divisores naturais	$d(n)$	$S(n)$
1	—	0	0	1	1	1
2	2	1	1	1, 2	2	3
3	3	1	1	1, 3	2	4
4	$2^2$	1	2	1, 2, 4	3	7
8	$2^3$	1	3	1, 2, 4, 8	4	15
15	$3 \cdot 5$	2	2	1, 3, 5, 15	4	24
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	3	5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120	16	360

Dizemos que uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é:

- *aditiva* se, para todos  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$\text{se } \text{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *completamente aditiva* se, para todos  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *multiplicativa* se, para todos  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$\text{se } \text{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

- *completamente multiplicativa* se, para todos  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

Para cada uma das funções  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $d$ ,  $S$ ,  $X$  e  $Y$  definidas acima, e para cada uma das propriedades *aditiva*, *completamente aditiva*, *multiplicativa* e *completamente multiplicativa*, diga se a função tem a propriedade ou não, provando cada caso positivo e dando um contra-exemplo para cada caso negativo. (*Dica*: poupe um bocadinho do seu trabalho: argumente que uma função ser *completamente aditiva* já implica que ela seja *aditiva* [também use a contrapositiva dessa implicação!], e analogamente para *completamente multiplicativa* e *multiplicativa*. Em um dos itens, pode ser útil usar a Questão 6 acima.)