# Teoria de Categorias & Programação Funcional 2022.2

Lista de Exercícios 1[†]

Entregar as soluções das questões assinaladas com *
até **11 de outubro no começo da aula**.

A entrega pode ser feita em pessoa ou digitalmente por email para
`hugonobrega@ic.ufrj.br`

As questões podem ser resolvidas em dupla.

**Questão 1.** Para cada item abaixo, responda o que é perguntado, sempre justificando sua resposta.

*** a.** A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: todos os conjuntos finitos
- Setas: todas as funções entre conjuntos finitos
- dom, cod, id, composta: como usual para funções

*** b.** Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma função $f :: A \to B$ é *$n$-limitada* se para qualquer $b \in B$ temos que existem no máximo $n$ elementos $a \in A$ diferentes tais que $f(a) = b$. Assim "1-limitada" é sinônimo de "injetiva".

Seja $n \geq 2$ um natural qualquer. A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: todos os conjuntos
- Setas: todas as funções $n$-limitadas
- dom, cod, id, composta: como usual para funções

**c.** A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: todos os conjuntos
- Setas: todas as funções 1-limitadas (definição dada no item (b) acima)

[†] Publicada em 21/9; atualizada em: - 21/9 (mudando exemplo de passeio em grafo); - 29/9 (mudando data de entrega)

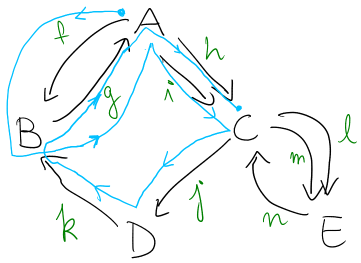
- dom, cod, id, composta: como usual para funções

*** d.** Seja $G$ um grafo (o mais "geral" possível, i.e., temos apenas um conjuntos de pontos e um conjunto de setas entre eles sem nenhuma exigência a mais, podendo haver laços, setas múltiplas entre um mesmo par de pontos, etc). Chamamos de um *passeio* em $G$ uma sequência

$$(v_0, a_0, v_1, a_1, v_2, \ldots, v_{i-2}, a_{i-2}, v_{i-1})$$

onde cada $v_j$ é um vértice do grafo e cada $a_j$ é uma seta ("arco", na nomenclatura usual de grafos) no grafo apontando de $v_j$ para $v_{j+1}$. Note que passeios devem começar e terminar em vértices.

No exemplo abaixo, $(A, f, B, g, A, i, C, j, D, k, B, g, A, h, C)$ é um passeio, mas $(A, f, B, k, D)$ não é.




A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: os vértices de $G$
- Setas: os passeios em $G$
- dom: o vértice onde começa o passeio
- cod: o vértice onde termina o passeio
- (para cada objeto $v$) id($v$): o passeio $(v)$, i.e., o passeio que começa e termina em $v$ sem passar por nenhuma seta para outro vértice
- composta: concatenação, mas antes removendo o último vértice do primeiro passeio:

$$\begin{aligned}(v_0, a_0, v_1, \ldots, a_{i-2}, v_{i-1}) \,;\, (v'_0, a'_0, v'_1, \ldots, a'_{j-2}, v'_{j-1}) \\ = (v_0, a_0, v_1, \ldots, a_{i-2}, v'_0, a'_0, v'_1, \ldots, a'_{j-2}, v'_{j-1})\end{aligned}$$

*** e.** Dado um grafo $G$ (novamente o mais "geral" possível), chamamos de um *caminho* em $G$ um passeio em $G$ que não passe duas vezes por nenhum vértice nem nenhuma seta.

No exemplo anterior, $(A, f, B, g, A, i, C, j, D, k, B, g, A)$ não é um caminho, mas $(A, h, C, j, D, k, B)$ é.

A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: os vértices de $G$
- Setas: os caminhos em $G$

- dom, cod, id, composta: exatamente como para passeios

*** f.** *A construção da categoria dual ou "oposta".*

Dada uma categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}_\mathcal{C}, \mathcal{A}_\mathcal{C}, \mathrm{dom}_\mathcal{C}, \mathrm{cod}_\mathcal{C}, \mathrm{id}_\mathcal{C}, ;_\mathcal{C})$, a especificação abaixo $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ é uma categoria?

- Objetos: $\mathcal{O}_\mathcal{C}$
- Setas: $\mathcal{A}_\mathcal{C}$
- dom: $\mathrm{cod}_\mathcal{C}$
- cod: $\mathrm{dom}_\mathcal{C}$
- id: $\mathrm{id}_\mathcal{C}$
- composta: $f \,;\, g = g \,;_\mathcal{C}\, f$

**Questão 2.** Como vimos em aula, intuitivamente, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias, então "apenas colocar cópias de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ lado a lado, sem interações entre elas" também parece ser uma categoria.

Dê uma descrição precisa dessa construção e prove que o resultado de fato é uma categoria. Para facilitar, você pode assumir que os objetos e setas de $\mathcal{C}$ não aparecem em $\mathcal{D}$ (i.e., as categorias são completamente "disjuntas").

**Questão 3.** Se uma categoria tem exatamente $n$ objetos...

**a.** existe uma quantidade *mínima* de setas que ela deve ter?

**b.** existe uma quantidade *máxima* de setas que ela pode ter?

**Questão 4.** Um *monoide* é um conjunto estruturado $(M, *, e)$ de assinatura "1 universo, 1 operação binária, 1 constante", satisfazendo os seguintes axiomas:

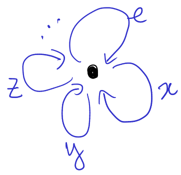
- "associatividade": $(x * y) * z = x * (y * z)$
- "elemento neutro": $x * e = x = e * x$

*** a.** Dê a definição de "homomorfismo de monoides".

*** b.** Agora seja $(M, *, e)$ um monoide qualquer. Prove que a seguinte especificação é uma categoria:

- Objetos: apenas um, $\bullet$
- Setas: os elementos de $M$
- dom, cod: funções constantes com saída $\bullet$ para qualquer entrada
- $\mathrm{id}(X) =$ o elemento neutro $e$ do monoide
- composta: a operação $*$ do monoide

$M = \{e, x, y, z, \ldots\}$




**Questão 5.** Seja $\mathsf{Set}^{\text{fin}}_{\text{inj}}$ a categoria onde os objetos são os conjuntos finitos, as setas são as funções injetivas entre conjuntos finitos, e o restante como usual para funções.

Seja também $\mathsf{Nat}_{\leq}$ a categoria "poset" definida a partir dos números naturais e sua ordem $\leq$ usual [lembrete: os objetos são os naturais, e entre cada par de naturais $n, m$ colocamos uma seta sse[1] $n \leq m$].

Definimos um funtor $F :: \mathsf{Set}^{\text{fin}}_{\text{inj}} \to \mathsf{Nat}_{\leq}$ da seguinte forma: para cada objeto $X$ de $\mathsf{Set}^{\text{fin}}_{\text{inj}}$, definimos $F(X) :=$ a quantidade de elementos de $X$. Complete a definição e prove que o resultado é de fato um funtor.

**Questão 6** ("Funtor preimagem")**.** Prove que a seguinte definição é um funtor. Definimos $\wp^{\text{pre}} :: \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}^{\text{op}}$ da seguinte forma.

- Dado um objeto $X$ da categoria $\mathsf{Set}$, definimos

$$\wp^{\text{pre}}(X) := \wp(X) = \text{conjunto das partes de } X$$

- Dada uma seta $f :: X \to Y$ da categoria $\mathsf{Set}$, temos que definir uma seta

$$\wp^{\text{pre}}(f) :: \wp^{\text{pre}}(X) \to \wp^{\text{pre}}(Y),$$

  na categoria $\mathsf{Set}^{\text{op}}$, o que (pelo exercício 1(f)) é a mesma coisa que uma seta

$$\wp^{\text{pre}}(f) :: \wp^{\text{pre}}(Y) \to \wp^{\text{pre}}(X),$$

  na categoria $\mathsf{Set}$.

  Em outras palavras, precisamos definir uma **função de $\wp(\mathbf{Y})$ para** $\wp(X)$! Fazemos isso definindo, para cada $A \in \wp(Y)$:

$$(\wp^{\text{pre}}(f))(A) := f^{-1}[A] = \{x \in X \;;\; f(x) \in A\} = \text{"a pré-imagem de } A \text{ por } f\text{"}.$$

***Questão 7.** Vamos definir em detalhes a categoria $\mathsf{Cat}$ de todas as categorias. Os objetos são todas as categorias, e as setas são todos os funtores. Complete a definição (definindo dom, cod, id e composta) e prove que sua definição dá, de fato, uma categoria.

**Questão 8** (Subcategorias)**.** Dadas duas estruturas $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ de uma mesma assinatura, dizemos que $\mathfrak{M}$ é uma *subestrutura* de $\mathfrak{N}$ se:

[1] se, e somente se

- Para cada universo $U$ na assinatura, a sua interpretação $\mathfrak{M}_U$ em $\mathfrak{M}$ é um subconjunto da interpretação $\mathfrak{N}_U$ em $\mathfrak{N}$.

$$\text{para todo universo } U \text{ na assinatura:} \qquad U_{\mathfrak{M}} \subseteq U_{\mathfrak{N}}$$

- para cada operação na assinatura, realizar a operação em elementos de $\mathfrak{M}$ de acordo com a interpretação de $\mathfrak{M}$ para a operação dá no mesmo que operar os mesmos elementos, mas usando a interpretação de $\mathfrak{N}$ para a operação.

$$\text{para toda operação op na assinatura:} \qquad \mathrm{op}_{\mathfrak{M}}(x, y, \ldots, z) = \mathrm{op}_{\mathfrak{N}}(x, y, \ldots, z)$$

- para cada relação na assinatura, e para quaisquer elementos de $\mathfrak{M}$, se esses elementos estão relacionados de acordo com a interpretação de $\mathfrak{M}$ para a relação, então o mesmo vale se usarmos a interpretação de $\mathfrak{N}$ para a relação.

para toda relação R na assinatura:
se $x, y, \ldots, z$ estão relacionados de acordo com $\mathrm{R}_{\mathfrak{M}}$
então $x, y, \ldots, z$ estão relacionados de acordo com $\mathrm{R}_{\mathfrak{N}}$

- para cada constante na assinatura, as interpretações de $\mathfrak{M}$ e de $\mathfrak{N}$ para a constante coincidem.

$$\text{para toda constante } c \text{ na assinatura:} \qquad c_{\mathfrak{M}} = c_{\mathfrak{N}}$$

Por exemplo, um monoide $(M, *, e)$ é uma subestrutura (nesse caso, um "submonoide") de um outro monoide $(N, \#, f)$ quando:

- cada elemento de $M$ é também um elemento de $N$
- para todos $x, y \in M$, temos $x * y \;=\; x \# y$
- temos $e = f$.

Assim o monoide $(\mathbb{N}, \times, 1)$ é um submonoide de $(\mathbb{R}, \times, 1)$, mas não é um submonoide de $(\mathbb{N}, +, 0)$.

**a.** Dados conjuntos $X$ e $Y$, se $X \subseteq Y$ então chamamos de *inclusão* a função $\mathrm{inc} :: X \to Y$ definida por $\mathrm{inc}(x) := x$ para todo $x \in X$.

Assim, a única diferença entre inclusão e (função) identidade é que na identidade o domínio e contradomínio devem ser os mesmos, mas isso não precisa ser verdade para a inclusão.

Prove que uma estrutura é subestrutura de outra sse[2] o mapa formado por inclusões para todos os universos da assinatura é um homomorfismo entre as estruturas.

**b.** Dê a definição "por extenso" da noção de quando uma categoria é subestrutura de outra.

[2] "se, e somente se"

*** c** (“Subcategoria plena”)**.** Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \,;\,)$ uma categoria, e seja $X$ um subconjunto qualquer de $\mathcal{O}$. Seja $Y$ o conjunto das setas de $\mathcal{C}$ entre elementos de $X$, i.e., setas $f \in \mathcal{A}$ tais que $\mathrm{dom}(f) \in X \ni \mathrm{cod}(f)$.

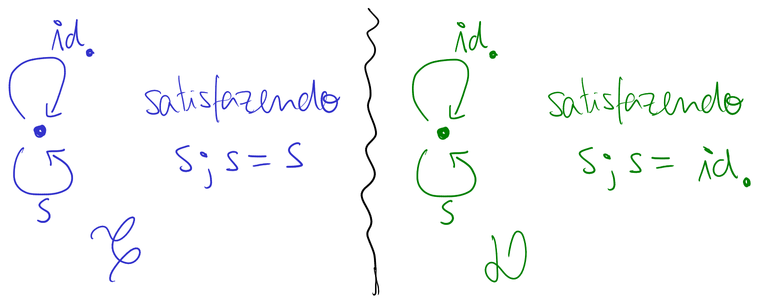
Prove que $(X, Y, \mathrm{dom}', \mathrm{cod}', \mathrm{id}', ;')$ é uma subcategoria (ou seja, é uma categoria e também é uma subestrutura de $\mathcal{C}$) de $\mathcal{C}$, onde as definições de $\mathrm{dom}'$, $\mathrm{cod}'$, $\mathrm{id}'$ e $;'$ são “herdadas” diretamente de dom, cod, id e $;$ (i.e., são calculadas exatamente da mesma forma).

*** d.** Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, ;)$ uma categoria, e sejam $X$ um subconjunto qualquer de $\mathcal{O}$ e $Y$ um subconjunto qualquer de $\mathcal{A}$.

Considere $\mathrm{dom}'$, $\mathrm{cod}'$, $\mathrm{id}'$ e $;'$ “herdadas” diretamente de dom, cod, id e $;$ como explicado no item anterior.

Quais propriedades ainda devem ser exigidas para que $(X, Y, \mathrm{dom}', \mathrm{cod}', \mathrm{id}', ;')$ seja uma subcategoria de $\mathcal{C}$?

**Questão 9.** Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ as categorias da figura abaixo:




Note que a única diferença entre as categorias é na definição de composta.

**a.** Quantos funtores há de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$?

*** b.** Dê uma explicação “intuitiva” (informal, porém clara) do que devem ser funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathsf{Set}$ e de $\mathcal{D}$ para $\mathsf{Set}$.

**c.** Dê dois exemplos diferentes de funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathsf{Set}$

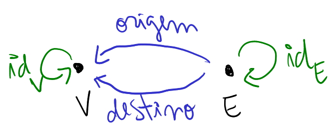
*** d.** Dê dois exemplos diferentes de funtores de $\mathcal{D}$ para $\mathsf{Set}$

**Questão 10.** Prove ou refute:

**a.** De qualquer categoria para qualquer categoria sempre existe pelo menos um funtor.

**b.** Dadas quaisquer categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, se $\mathcal{D}$ tem pelo menos um objeto então existe pelo menos um funtor de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$.

**Questão 11.** Considere a categoria abaixo, que chamaremos de $\mathcal{G}$:



Dê uma descrição intuitiva (informal, porém clara) do que são os funtores de $\mathcal{G}$ para $\mathsf{Set}$.

***Questão 12.** Na Questão 4 vimos que todo monoide pode ser visto como uma categoria com apenas um objeto (e tantas setas quanto há elementos no monoide).

Prove que homomorfismos entre monoides (vistos da forma usual) "são o mesmo" que funtores entre os monoides vistos como categorias: cada homomorfismo corresponde a exatamente um funtor, e cada funtor também corresponde a exatamente um homomorfismo.