Teoria de Categorias & Programação Funcional 2022.2

Lista de Exercícios 3[†]

Entregar as soluções das questões assinaladas com *
até **3 de novembro no começo da aula**.

A entrega deve ser feita por email para `hugonobrega@ic.ufrj.br`

As questões podem ser resolvidas em dupla, mas as duplas não podem ser repetidas de listas anteriores.

Questão 1.

*** a** (“Isomorfismos não são necessariamente únicos”)**.** Dê exemplo de:

- Duas categorias <u>diferentes</u> $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$
- Objetos <u>diferentes</u> A e B em $\mathcal{C}$ e objetos <u>diferentes</u> X e Y em $\mathcal{D}$
- Setas <u>diferentes</u> $f, g : A \to B$ em $\mathcal{C}$, e setas <u>diferentes</u> $h, k : X \to Y$ em $\mathcal{D}$

tais que

1. f e g são isomorfismos de A para B em $\mathcal{C}$
2. h e k são isomorfismos de X para Y em $\mathcal{D}$.

Você ganhará uma pontuação parcial se suas categorias forem diferentes, porém isomorfas!

b. Prove que, na categoria Set e sendo $\times$ o *produto cartesiano* usual (i.e., $A \times B = \{(a, b) \ ; \ a \in A \text{ e } b \in B\}$) com as *projeções* usuais (i.e., $\pi_0(a, b) = a$ e $\pi_1(a, b) = b$), temos

$$A \times (B \times C) \simeq (A \times B) \times C.$$

c (Versão “hardcore” do item (b))**.** Prove que, em qualquer categoria, sempre que os produtos mencionados existirem teremos

$$A \times (B \times C) \simeq (A \times B) \times C.$$

[†]Publicada em 21/10. Atualizada em 26/10, corrigindo a definição da categoria Mat na Questão 4.

Note que esse é um pequeno abuso de notação. O teorema "completamente legalizado" seria: em qualquer categoria, se

$$B \xleftarrow{\pi_0} X \xrightarrow{\pi_1} C \qquad A \xleftarrow{\tau_0} Y \xrightarrow{\tau_1} X \qquad A \xleftarrow{\sigma_0} Z \xrightarrow{\sigma_1} B \qquad Z \xleftarrow{\theta_0} W \xrightarrow{\theta_1} C$$

são produtos, então $Y \simeq W$.

Dica: lembre-se de que provamos em sala que o produto de dois objetos é "único a menos de isomorfismo".

d. Prove que f é um isomorfismo de A para B em uma categoria sse f é um isomorfismo de B para A na categoria dual.

e. Prove que o coproduto de dois objetos, quando existe, também é único a menos de isomorfismos.

*** f.** Prove que as três versões da definição abaixo são equivalentes:

Definição. Sejam A e B objetos de uma categoria. Dizemos que A e B são *isomorfos* se existem $f : A \to B$ e $g : B \to A$ tais que ...

(v1) $f; g = \mathrm{id}_A$ e $g; f = \mathrm{id}_B$

(v2) para todo objeto C e todas setas $h : A \to C$ e $k : B \to C$ temos

$$h = f; k \quad \text{sse} \quad k = g; h$$

(v3) para todo objeto C e todas setas $h' : C \to A$ e $k' : C \to B$ temos

$$h' = k'; g \quad \text{sse} \quad k' = h'; f$$

g. Prove que, em qualquer categoria, se $A \xleftarrow{\pi_0} C \xrightarrow{\pi_1} B$ é um produto e $D \simeq C$, então existem setas σ_0, σ_1 tais que $A \xleftarrow{\sigma_0} D \xrightarrow{\sigma_1} B$ também é um produto.

***Questão 2.** Prove que em qualquer categoria poset, qualquer diagrama é comutativo.

Lembrete: "categoria poset" é uma categoria construída a partir de uma pré-ordem (i.e., um conjunto com uma relação simétrica e transitiva) como vimos em sala: os objetos são os elementos do conjunto, e entre um par de elementos colocamos uma (e exatamente uma) seta sse eles estão relacionados pela pré-ordem.

Questão 3. Prove que

$$A \xleftarrow{\pi_0} X \xrightarrow{\pi_1} B \text{ é um produto em uma categoria } \mathcal{C}$$
sse
$$A \xrightarrow{\pi_0} X \xleftarrow{\pi_1} B \text{ é um coproduto na categoria dual } \mathcal{C}^{\mathrm{op}}.$$

Questão 4. Prove que nas seguintes categorias todos os pares de objetos têm um produto.

a. A categoria das matrizes "Mat" (objetos são os naturais, setas são as matrizes de números reais, dom é "quantidade de colunas", cod é "quantidade de linhas" e composta definida por $A \circ B = A \cdot B$, sendo $\cdot$ o produto usual de matrizes).

*** b.** Categoria dos monoides "Mon" (objetos são os monoides, setas são os homomorfismos de monoides, o restante como usual para funções).

c. A categoria "Cat" de todas as categorias.

d. Dada uma assinatura qualquer, a categoria das estruturas dessa assinatura.

*** e.** Categoria da lógica proposicional "Prop", que é a categoria poset construída a partir da seguinte pré-ordem: os elementos são as fórmulas da lógica proposicional (sem quantificadores), e a pré-ordem é dada por

$$\varphi \preceq \psi \quad \text{sse} \quad \varphi \to \psi \text{ é uma tautologia (i.e., é sempre verdadeira)}$$

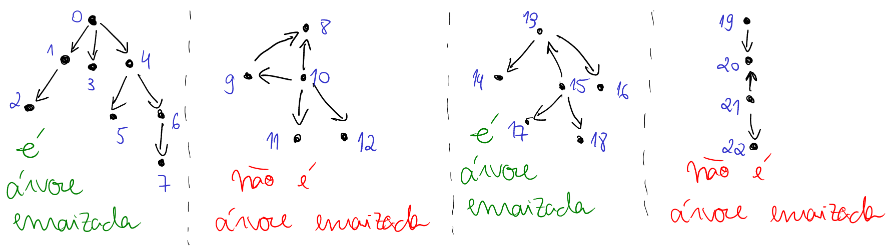
Questão 5. Prove que nas seguintes categorias todos os pares de objetos têm um coproduto.

*** a.** Mat

*** b.** Cat

c. Prop

Questão 6. Chamamos de *árvore enraizada* (direcionada) um grafo direcionado com um vértice distinguido r (chamado *raiz*), satisfazendo que para todo vértice $v \neq r$ do grafo exista exatamente um caminho da raiz r até v seguindo pelos arcos. Veja os exemplos abaixo.



Seja então T uma árvore enraizada direcionada com raiz r. Considere a categoria $\mathcal{C}$ construída a partir de T como descrito na Questão 1(e) da Lista 1: os objetos são os vértices de T, as setas são os caminhos de T, dom é "o vértice do início do caminho", cod é "o vértice do final do caminho", $\mathrm{id}(v) = (v)$ [caminho com apenas o vértice v e nada mais], e a composta de duas setas compatíveis é a concatenação após a retirada do vértice inicial da segunda seta.

a. Prove que (ao contrário do que acontecia em geral na Questão 1(e) da Lista 1), $\mathcal{C}$ de fato é uma categoria.

*** b.** Prove que nessa categoria todo par de vértices tem um único produto.

*** c.** Qual a condição que um dado par de vértices v, w deve satisfazer para que tenham coproduto nessa categoria?

Questão 7. Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e considere a categoria "vértices e passeios" construída a partir de G como na Questão 1(d) da Lista 1.

Prove que os únicos isomorfismos desta categoria são as setas identidade de cada objeto ("os únicos isomorfismos são os triviais", em jargão matemático).

Questão 8. Prove que os seguintes pares de objetos nas categorias dadas são isomorfos:

a. Em Cat, a categoria poset dos naturais divisores de 30 com a relação de divisibilidade, e a categoria poset dos subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$ com a relação de subconjunto.

b. Em Mon, o monoide das palavras finitas de um alfabeto de 1 letra com a operação de concatenação e constante "palavra-vazia", e o monoide dos naturais com operação de soma e constante 0.

* **c.** Em Mon, o monoide dos números reais com operação de soma e constante 0, e o monoide dos números reais estritamente positivos, com operação de multiplicação e constante 1.

d. Em Set, o conjunto $\wp(\mathbb{N})$ [o conjunto das partes de $\mathbb{N}$, i.e., o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$] e o conjunto de todas as sequências infinitas de 0s e 1s.

Questão 9. Considere a categoria Pos onde os objetos são todos os posets (conjuntos dotados de uma ordem parcial, i.e., uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva) e as setas são as funções não-decrescentes, i.e., que preservam ordem (como vimos em sala, isso é simplesmente o que "preservação de estrutura" quer dizer neste caso!).

* **a.** Prove que, dados posets $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, um produto deles em Pos é dado por

$$(X, \leq_X) \xleftarrow{\pi_0} (X \times Y, \leq) \xrightarrow{\pi_1} (Y, \leq_Y)$$

onde $X \xleftarrow{\pi_0} (X \times Y) \xrightarrow{\pi_1} Y$ é o produto cartesiano usual de Set, e $\leq$ é definida por

$$(x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \quad \text{sse} \quad x_0 \leq_X x_1 \text{ e } y_0 \leq_Y y_1.$$

* **b.** Prove que em Pos temos o seguinte isomorfismo pra qualquer par de conjuntos A, B:

$$(\wp(A), \subseteq) \times (\wp(B), \subseteq) \quad \simeq \quad (\wp(A \uplus B), \subseteq)$$

onde $\wp$ é "conjunto das partes de" e $\uplus$ é "união disjunta".

Dica: o que está do lado esquerdo de $\simeq$ é um produto; portanto, para provar que vale o isomorfismo, basta provar que o lado direito ...

Questão 10 (Versão "hardcore" da Questão 9)**.**

a. Prove que, dados posets $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, um produto deles em Pos é dado por

$$(X, \leq_X) \xleftarrow{\pi_0} (X \times Y, \leq) \xrightarrow{\pi_1} (Y, \leq_Y)$$

onde $X \xleftarrow{\pi_0} (X \times Y) \xrightarrow{\pi_1} Y$ é qualquer produto de X e Y em Set, e $\leq$ é definida por

$$a \leq b \quad \text{sse} \quad \pi_0(a) \leq_X \pi_0(b) \text{ e } \pi_1(a) \leq_Y \pi_1(b)$$

b. Prove que em Pos temos o seguinte isomorfismo pra qualquer par de conjuntos A, B:

$$(\wp(A), \subseteq) \times (\wp(B), \subseteq) \quad \simeq \quad (\wp(A + B), \subseteq)$$

onde

$$\wp(A) \xleftarrow{\pi_0} (\wp(A) \times \wp(B)) \xrightarrow{\pi_1} \wp(B) \qquad \text{e} \qquad A \xrightarrow{i_0} (A + B) \xleftarrow{i_1} B$$

são respectivamente qualquer produto e qualquer coproduto em Set.