Teoria de Categorias & Programação Funcional 2022.2

Lista de Exercícios 4[†]

Entregar as soluções das questões assinaladas com *
até **22/12 no começo da aula**.

A entrega deve ser feita por email para `hugonobrega@ic.ufrj.br`

As questões podem ser resolvidas em dupla, mas as duplas não podem ser repetidas de listas anteriores.

Questão 1.

*** a.** Sejam $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores, e sejam $\eta : F \to G$ e $\delta : G \to H$ transformações naturais. Defina uma transformação natural $\varepsilon : F \to H$ que intuitivamente seja uma "composta" de η com δ (no sentido "primeiro η, depois δ").

A sua solução deve ser feita de forma a permitir que você faça o item (b) abaixo!

*** b.** Mostre que, para quaisquer categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ fixas, a seguinte especificação forma uma categoria:

- objetos: os funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$
- setas: as transformações naturais entre estes funtores
- dom: o funtor de onde "sai" a transformação natural
- cod: o funtor onde "chega" a transformação natural
- id(F): a transformação natural $\eta : F \to F$ dada por $\eta_X = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}(F(X))$ para cada $X \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$
- $;$: a sua operação do item (a) acima

Esta categoria é denotada $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Questão 2. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias quaiquer. Como vimos na questão 1(b), os funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ formam uma categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, portanto como vimos em sala temos uma definição de *isomorfismo* de funtores.

[†] Publicada em 2/12, atualizada em 2/12 (questões 5(a) e 5(d))

a. Mostre que uma transformação natural é um isomorfismo em $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ (de acordo com a noção usual) se, e somente se, cada uma de suas componentes é um isomorfismo em $\mathcal{D}$.

b. Mostre que se $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ são funtores inversos um do outro (i.e., $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = F\,; G$ e $G\,; F = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$), então temos $F \dashv G$. Qual a unidade dessa adjunção?

c. Dizemos que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *equivalentes* se existem funtores $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ tais que $\mathrm{id}_C \simeq F\,; G$ e $G\,; F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. ("Equivalência de categorias" é uma espécie de "isomorfismo a menos de isomorfismo".)

Prove, que nesta situação, temos $F \dashv G$. Qual a unidade dessa adjunção?

***Questão 3.** Sejam $F, G : \mathcal{C} \to (P, \leq)$ funtores, onde $(P, \leq)$ é uma categoria poset.

Prove que qualquer função $\eta : \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}_{(P,\leq)}$ que satisfaça $\forall X \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}\ (\eta(X) : F(X) \leq G(X))$ é uma transformação natural entre F e G.

***Questão 4.** Defina uma função de tipo `[a] -> [a]` em Haskell, diferente da função identidade e da função "constante com saída lista vazia", e prove que sua função é uma transformação natural do funtor "lista" para ele mesmo.

Não é permitido fazer um apelo a "teoremas de graça"!

Lembrete: a notação `[a] -> [a]` quer dizer que a sua função deve funcionar para listas de quaisquer tipos (mas, em qualquer chamada, o tipo da saída deve ser sempre o mesmo da entrada).

Questão 5 (Construções livres)**.** Prove que cada funtor "esquecedor" a seguir possui um funtor adjunto à esquerda correspondente (ou seja, um funtor "livre" na direção contrária à do esquecedor).

Lembrete: em cada caso, a intuição é que o funtor construa o objeto "universal", ou "mais livre possível", dentre aqueles que contenham a parte que não foi esquecida.

*** a.** Esquecedor: da categoria Grafos ("no sentido mais geral": com arestas direcionadas, permitindo laços e arestas paralelas) que leva cada grafo ao seu conjunto de <u>arestas</u> (e leva cada seta à "sua componente nas arestas", vista apenas como função).

b. Esquecedor: da categoria Cat para a categoria Set, levando cada categoria para o seu conjunto[1] de vértices.

c. Esquecedor: da categoria Cat para a categoria Set, levando cada categoria para o seu conjunto[2] de setas.

*** d.** Esquecedor: da categoria Cat para a categoria Grafos, que leva cada categoria $(\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \,;\,)$ ao grafo[3] $(\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod})$ (e leva cada seta a si própria, "esquecendo" a preservação de identidades e compostas mas <u>não</u> esquecendo a preservação de domínios e codomínios!).

[1] Aqui, formalmente, precisaríamos usar não Cat mas a "categoria de todas as categorias pequenas", mas vamos combinar de fingir que esse problema não existe.

[2] Aqui, formalmente, precisaríamos usar não Cat mas a "categoria de todas as categorias localmente pequenas", mas vamos combinar de fingir que esse problema não existe.

[3] Aqui, formalmente, precisaríamos usar não Cat mas a "categoria de todas as categorias pequenas", mas vamos combinar de fingir que esse problema não existe.

Questão 6.

*** a.** Sejam $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ funtores tais que $F \dashv G$ com unidade $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to F\,;G$.

Dados quaisquer objetos X de $\mathcal{C}$ e Y de $\mathcal{D}$, e qualquer seta $f : X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$, seja $\tilde{f} : F(X) \to Y$ a <u>única</u> seta em $\mathcal{D}$ que satisfaz $f = \eta_X\,; G(\tilde{f})$.

Prove que, para quaiquer objetos X de $\mathcal{C}$ e Y de $\mathcal{D}$, a operação $\lambda\, f\, .\, \tilde{f}$ é uma bijeção entre as setas de tipo $X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$ e as setas de tipo $F(X) \to Y$ em $\mathcal{D}$. Em outras palavras, dados $X \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$, $Y \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$, prove:

- Injetividade: se $f : X \to G(Y)$ e $g : X \to G(Y)$ são setas de $\mathcal{C}$ diferentes, então $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são diferentes também.
- Sobrejetividade: para qualquer $g : F(X) \to Y$ em $\mathcal{D}$ existe alguma $f : X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$ tal que $g = \tilde{f}$.

*** b.** Agora suponha que $\mathcal{C} = (P, \leq_P)$ e $\mathcal{D} = (Q, \leq_Q)$ sejam duas categorias poset, e como anteriormente sejam $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$. Prove que temos

$$\begin{gathered} F \dashv G \text{ com alguma unidade } \eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to F\,;G \\ \text{sse} \\ \forall p \in P\, \forall q \in Q\ \ (p \leq_P G(q) \iff F(p) \leq_Q q). \end{gathered}$$

Dica: na "volta", para definir uma componente $\eta_p : p \leq_P (F\,;G)(p)$ da unidade, instancie a hipótese com $q = F(p)$ (como fizemos em sala!). Você precisa fazer algo para provar "naturalidade"?

Questão 7. Ao longo de toda essa questão, seja Y um objeto fixo em uma categoria $\mathcal{C}$.

Definição. Suponha que para cada $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ tenhamos um produto $A \times Y$ em $\mathcal{C}$, com projeções π_0^A e π_1^A. Um par $(Z \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}},\ \varepsilon : Z \times Y \to X)$ é chamado *exponencial de* X *e* Y *em* $\mathcal{C}$ se é "universal" no seguinte sentido:

$$\begin{gathered} \text{para todo par } (A \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}},\ f : A \times Y \to X) \\ \text{existe uma única seta curry}(f) : A \to Z \\ \text{tal que } f = (\mathrm{curry}(f) \times \mathrm{id}_Y)\,; \varepsilon. \end{gathered}$$

$$\left(\begin{tikzcd} A \times Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{curry}(f) \times \mathrm{id}_Y"'] & X \\ Z \times Y \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{"comuta"} \right)$$

a. Defina uma categoria com a propriedade de que as exponenciais de X e Y em $\mathcal{C}$ sejam exatamente os objetos terminais da categoria definida.

b. Prove que, se (Z, ε) é uma exponencial de X e Y, então para qualquer $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ a "operação" curry é uma bijeção entre as setas de tipo $A \times Y \to X$ e as setas de tipo $A \to Z$ em $\mathcal{C}$. (Portanto a operação curry tem uma inversa, usualmente chamada "uncurry".)

*** c** ("Exponenciais são únicas a menos de isomorfismo")**.** Prove que se (Z, ε) e (Z', ε') ambos são exponenciais de X e Y, então $Z \simeq Z'$. (Como usual, isso "justifica" o abuso de uma notação X^Y para denotar (o objeto de um') a exponencial de X e Y).

*** d.** Suponha que para *qualquer* $X \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ tenhamos uma exponencial $(X^Y,\ \varepsilon_X : X^Y \times Y \to X)$ em $\mathcal{C}$.

Agora "funtorialize" essa construção: dada qualquer seta $f : X \to W$, dê uma definição de uma seta $f^Y : X^Y \to W^Y$ de forma que

$$\text{em objetos} : X \mapsto X^Y$$
$$\text{em setas} : f \mapsto f^Y$$

seja um funtor de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}$.

e. Suponha que $\mathcal{C}$ tenha todos os "produtos com Y" e todas as exponenciais "elevadas a Y". Para cada $X \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ fixemos um produto

$$(X \times Y,\ \pi_0^X : X \times Y \to X,\ \pi_1^X : X \times Y \to Y)$$

e uma exponencial

$$(X^Y,\ \varepsilon_X : X^Y \times Y \to X).$$

Considere os funtores $F = (-) \times Y$ e $G = (-)^Y$, ambos de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}$.

Prove que temos $F \dashv G$ com counidade $\varepsilon : G;F \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$ sendo a transformação natural que tem as setas ε_X como componentes. (Em particular, você deve mostrar que isso é de fato uma transformação natural!)

***Questão 8.** Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias. Usando a definição de $\mathcal{A}^\mathcal{B}$ dada na questão 1(b) e a definição de exponencial dada na questão 7, defina um funtor $\varepsilon : \mathcal{A}^\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ de forma que $(\mathcal{A}^\mathcal{B},\ \varepsilon)$ seja uma exponencial de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em Cat.

Questão 9. Seja 1 a única categoria com 1 objeto e 1 seta.

a. Prove que 1 é objeto terminal de Cat.

b. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $! : \mathcal{C} \to 1$ o único funtor de $\mathcal{C}$ para 1.

Prove que ! tem adjunto à direita sse $\mathcal{C}$ possui um objeto terminal e que ! tem adjunto à esquerda sse $\mathcal{C}$ possui um objeto inicial.