

# Lógica e Computabilidade 2023.1

Hugo Nobrega

## Lista de Exercícios 2

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!

Entregue todas as questões marcadas com \* até **22 de maio às 23:59**, exceto as questões 3(e) e 4(e), que podem ser entregues até **26 de maio às 23:59**

**Questão 1.** Considere a seguinte definição.

**Definição 1.** Dadas fórmulas  $\varphi, \psi$  e uma fórmula atômica  $p$ , denotamos por

$\varphi \left[ \frac{\psi}{p} \right]$  o resultado de *substituir* cada ocorrência de  $p$  em  $\varphi$  por  $\psi$ .

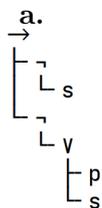
Por exemplo, para  $\varphi = ((\neg(p \rightarrow q)) \wedge (\neg p))$  e  $\psi = (r \rightarrow p)$ , temos

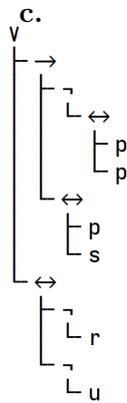
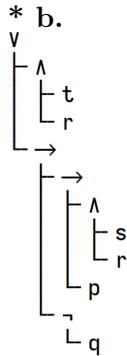
$$\varphi \left[ \frac{\psi}{p} \right] = ((\neg((r \rightarrow p) \rightarrow q)) \wedge (\neg(r \rightarrow p)))$$

\* **a.** Dê uma definição recursiva para esse conceito. *Dica:* Considere  $\psi$  uma fórmula qualquer (fixa) e faça a recursão em  $\varphi$ .

**b.** Prove que, se  $\varphi$  é uma fórmula válida, então  $\varphi \left[ \frac{\psi}{p} \right]$  também é válida para qualquer fórmula  $\psi$  e qualquer fórmula atômica  $p$ .

**Questão 2.** Classifique cada uma das fórmulas abaixo em *válida*, *contradição* ou *contingência*. Justifique cada resposta.





**Questão 3.** A seguinte definição será usada em alguns dos itens abaixo.

**Definição 2.** Um *literal* é um símbolo proposicional, ou a negação de um símbolo proposicional (i.e., uma fórmula  $(\neg p)$  onde  $p$  é um símbolo proposicional).

Em notação Backus–Naur:

$$\langle \text{literal} \rangle := \langle \text{símbolo proposicional} \rangle \mid (\neg \langle \text{símbolo proposicional} \rangle)$$

a. Considere os seguintes conjuntos de fórmulas, definidos por recursão:

**Definição 3** (Forma normal conjuntiva (FNC) (ou CNF, do inglês)).

- Uma *cláusula para FNC* é um literal, ou a disjunção entre um literal e uma cláusula para FNC.
- Uma *fórmula em FNC* é uma cláusula para FNC, ou a conjunção entre uma cláusula para FNC e uma fórmula em FNC.

Em notação Backus–Naur:

$$\begin{aligned} \langle \text{cláusula para FNC} \rangle &:= \langle \text{literal} \rangle \mid (\langle \text{literal} \rangle \vee \langle \text{cláusula para FNC} \rangle) \\ \langle \text{fórmula em FNC} \rangle &:= \langle \text{cláusula para FNC} \rangle \\ &\quad \mid (\langle \text{cláusula para FNC} \rangle \wedge \langle \text{fórmula em FNC} \rangle) \end{aligned}$$

A forma normal conjuntiva também é conhecida como *forma normal clausal*.

Prove que toda fórmula da LC é semanticamente equivalente a alguma fórmula em FNC.

**b.** Faça (em pseudocódigo ou em sua linguagem favorita) um programa de computador que converta uma fórmula qualquer da LC para uma equivalente em FNC.

**c.** Considere os seguintes conjuntos de fórmulas, definidos por recursão:

**Definição 4** (Forma normal disjuntiva (FND) (ou DNF, do inglês)).

- Uma *cláusula para FND* é um literal, ou a conjunção entre um literal e uma cláusula para FND.
- Uma *fórmula em FND* é uma cláusula para FND, ou a disjunção entre uma cláusula para FND e uma fórmula em FND.

Em notação Backus–Naur:

$$\begin{aligned} \langle \text{cláusula para FND} \rangle &:= \langle \text{literal} \rangle \mid (\langle \text{literal} \rangle \wedge \langle \text{cláusula para FND} \rangle) \\ \langle \text{fórmula em FND} \rangle &:= \langle \text{cláusula para FND} \rangle \\ &\quad \mid ((\langle \text{cláusula para FND} \rangle \vee \langle \text{fórmula em FND} \rangle) \end{aligned}$$

Prove que toda fórmula da LC é semanticamente equivalente a alguma fórmula em FND.

**d.** Faça (em pseudocódigo ou em sua linguagem favorita) um programa de computador que converta uma fórmula qualquer da LC para uma equivalente em FND.

\* **e.** Para essa questão, primeiramente vamos...

- expandir o alfabeto da lógica proposicional LC, adicionando um novo símbolo:  $\perp$  (usualmente chamado “falso” ou “bottom”)
- expandir a definição das fórmulas, permitindo um caso base adicional: “ $\perp$  é uma fórmula”
- expandir a definição de semântica das fórmulas, com um caso base adicional: “o valor-verdade de  $\perp$  é sempre  $F$ .”

Agora considere a seguinte definição:

**Definição 5** (Forma normal implicativa (FNI) (ou INF, do inglês)).

- Uma *fórmula em FNI* é um símbolo proposicional, ou uma fórmula do tipo  $(\varphi \rightarrow \perp)$ , onde  $\varphi$  é uma fórmula em FNI, ou uma fórmula do tipo  $(\varphi \rightarrow \psi)$ , onde  $\varphi, \psi$  são fórmulas em FNI.

Em notação Backus–Naur:

$$\begin{aligned} \langle \text{fórmula em FNI} \rangle &:= \langle \text{símbolo proposicional} \rangle \\ &| (\langle \text{fórmula em FNI} \rangle \rightarrow \perp) \\ &| (\langle \text{fórmula em FNI} \rangle \rightarrow \langle \text{fórmula em FNI} \rangle) \end{aligned}$$

Prove que toda fórmula da LC é semanticamente equivalente a alguma fórmula em FNI.

f. Faça (em pseudocódigo ou em sua linguagem favorita) um programa de computador que converta uma fórmula qualquer da LC para uma equivalente em FNI.

**Questão 4.** Mostre que os seguintes conjuntos de conectivos são completos:

a.  $\{\neg, \wedge\}$

b.  $\{\neg, \vee\}$

c.  $\{\neg, \rightarrow\}$

d.  $\{\neg, \leftrightarrow\}$

\* e.  $\{\rightarrow, \perp\}$ , com  $\perp$  conforme descrito na Questão 3(e) acima (note que  $\perp$  pode ser visto como um conectivo “nulário” ou “0-ário”, i.e., um conectivo que se aplica a zero outras fórmulas).

f.  $\{\text{NAND}\}$ , sendo NAND o conectivo binário “não ambos”, i.e., com a semântica dada pela tabela abaixo:

$\varphi$	$\psi$	$(\varphi \text{ NAND } \psi)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Por motivos históricos, o conectivo NAND também é conhecido como “Sheffer stroke”.

g.  $\{\text{NOR}\}$ , sendo NOR o conectivo binário “nenhum dos dois”, i.e., com a semântica dada pela tabela abaixo:

$\varphi$	$\psi$	$(\varphi \text{ NOR } \psi)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

**Questão 5.** Seja  $X$  o conjunto das fórmulas construídas apenas usando os conectivos  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  (além dos símbolos proposicional usuais).

\* **a.** Escreva a definição recursiva de  $X$ .

\* **b.** Prove o seguinte teorema:

**Teorema.** *Seja  $\varphi \in X$  e sejam  $p_0, p_1, \dots, p_n$  as subfórmulas atômicas de  $\varphi$ .*

*Então em qualquer contexto no qual  $p_0, p_1, \dots, p_n$  são todos verdadeiros, temos que  $\varphi$  também é verdadeiro.*

*Em outra palavras, temos*

$$(p_0 \wedge (p_1 \wedge \dots (p_{n-1} \wedge p_n))) \models \varphi$$

\* **c.** Prove que o conjunto  $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  de conectivos não é completo.

\***Questão 6.** Considere a seguinte sequência infinita de fórmulas definidas por recursão (aqui o parâmetro  $n$  é sempre natural):

$$\varphi_n = \begin{cases} (p \rightarrow q), & \text{se } n = 0 \\ (\varphi_{n-1} \rightarrow p), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Para quais valores de  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $\varphi_n$  é uma tautologia (i.e., uma fórmula válida)? Justifique sua resposta.