Lógica e Computabilidade 2023.1

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
<u>não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!</u>
Entregue todas as 6 questões marcadas com * até
12 de junho às 23:59,

Questão 1. Nesta questão você não pode usar os teoremas de corretude e completude vistos em sala.

Sejam Σ, Δ conjuntos de fórmulas da LC e sejam φ, ψ fórmulas da LC.

a. Prove que se $\Sigma \vdash \varphi$, então também $\Sigma \cup \Delta \vdash \varphi$.

b. Prove que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ se, e somente se, $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Questão 2. Prove os itens abaixo usando árvores de avaliação.

* **a.** $\{p \vee q,\ p \to r,\ q \to r\} \vdash r$

* **b.** $\{p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)\} \nvdash [p \wedge (q \wedge r)] \vee [(\neg p) \wedge \langle(\neg q) \wedge (\neg r)\rangle]$

Questão 3. Como vimos, além de $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ há outros conjuntos de conectivos completos para a LC. Em cada item abaixo, dê regras de manipulação de árvores de avaliação que correspondam aos conectivos listados (i.e., a ideia é que com as árvores construídas seguindo as suas regras nós possamos provar teoremas de completude e corretude como fizemos em sala com os conectivos usuais, mas você não precisa provar esses teoremas).

a. $\{\text{NAND}\}$

b. $\{\text{NOR}\}$

c. $\{\to, \text{XOR}\}$, onde XOR é o conectivo binário "ou exclusivo", cuja semântica é dada pela tabela abaixo. Você pode assumir que esse conjunto é completo (não precisa provar).

φ	ψ	$(\varphi \text{ XOR } \psi)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

*** d.** $\{\bot, \top, \textsc{if-then-else}\}$, onde $\bot$ é como na Lista 2, $\top$ é o "conectivo 0-ário" sempre verdadeiro (conhecido como "top"), e IF-THEN-ELSE é o conectivo "condicional ternário", presente em algumas linguagens de programação, cuja semântica é dada pela tabela abaixo. Você pode assumir que esse conjunto é completo (não precisa provar).

φ	ψ	β	$(\textsc{if-then-else}(\varphi, \psi, \beta))$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

Em outras palavras: se φ é verdadeiro, copie ψ; senão, copie β.

Questão 4. Nesta questão vamos provar a completude do nosso sistema de provas para a LC, i.e., vamos provar que para qualquer conjunto Σ de fórmulas da LC e qualquer fórmula φ da LC temos

$$\Sigma \vDash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \varphi.$$

Na verdade, provaremos a contrapositiva dessa implicação.

Definição. Seja A uma árvore de avaliação e seja r um ramo de A. Dizemos que r é *saturado* se, para qualquer julgamento composto $\varphi : \star$ que ocorra como rótulo de um nó de r, temos algum dos casos abaixo:

Caso $\neg$. Se $\varphi = (\neg\psi)$, então em r há algum nó com rótulo $\psi : \bar{\star}$.

Caso $\wedge : V$. Se $\varphi = (\psi \wedge \beta)$ e $\star = V$, então em r há nós com rótulos $\psi : V$ e $\beta : V$.

Caso $\wedge : F$. Se $\varphi = (\psi \wedge \beta)$ e $\star = F$, então em r há algum nó com rótulo $\psi : F$ ou algum nó com rótulo $\beta : F$.

Caso $\vee : V$. Se $\varphi = (\psi \vee \beta)$ e $\star = V$, então em r há algum nó com rótulo $\psi : V$ ou algum nó com rótulo $\beta : V$.

Caso $\vee : F$. Se $\varphi = (\psi \vee \beta)$ e $\star = F$, então em r há nós com rótulos $\psi : F$ e $\beta : F$.

Caso $\rightarrow : V$. Se $\varphi = (\psi \rightarrow \beta)$ e $\star = V$, então em r há algum nó com rótulo $\psi : F$ ou algum nó com rótulo $\beta : V$.

Caso $\rightarrow : F$. Se $\varphi = (\psi \rightarrow \beta)$ e $\star = F$, então em r há nós com rótulos $\psi : V$ e $\beta : F$.

Caso $\leftrightarrow : V$. Se $\varphi = (\psi \leftrightarrow \beta)$ e $\star = V$, então em r há nós com rótulos $\psi : V$ e $\beta : V$, ou algum nós com rótulos $\psi : F$ e $\beta : F$.

Caso $\leftrightarrow$: F. Se $\varphi = (\psi \leftrightarrow \beta)$ e $\star = F$, então em r há nós com rótulos $\psi : V$ e $\beta : F$, ou algum nós com rótulos $\psi : F$ e $\beta : V$.

* **a.** Seja r um ramo aberto e saturado de uma árvore de avaliação A. Seja c_r o contexto definido por:

$$c_r(p) = \begin{cases} V, & \text{se } p : V \text{ é o rótulo de algum nó de } r \\ F, & \text{se } p : F \text{ é o rótulo de algum nó de } r. \end{cases}$$

Mostre que este contexto satisfaz r (i.e., satisfaz todos os julgamentos que aparecem como rótulos dos nós em r). (*Dica*: em "quem" você pode fazer indução?)

b. Por que precisamos exigir que o ramo r seja aberto e saturado, no item anterior?

* **c.** Prove o teorema da completude: se $\Sigma \nvdash \varphi$ (i.e., toda árvore de avaliação completa para $\Gamma = \{\sigma : V \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{\varphi : F\}$ é aberta), então $\Sigma \nvDash \varphi$ (i.e., algum contexto torna todas as fórmulas em Σ verdadeiras mas φ falsa).

***Questão 5.** Seja φ uma fórmula do conjunto X da Lista 2, i.e., uma fórmula construída usando apenas símbolos proposicionais e os conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Prove que para todo $k \in \mathbb{N}$, se φ tem k ocorrências de símbolos proposicionais (contando todas as repetições), então o comprimento de φ (considerando φ como uma palavra em um alfabeto) é $4k - 3$.

Questão 6. Considere a seguinte sequência infinita de fórmulas definidas por recursão na Lista 2:

$$\varphi_n = \begin{cases} (p \rightarrow q), & \text{se } n = 0 \\ (\varphi_{n-1} \rightarrow p), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Use as árvores de avaliação e indução para provar que φ_n é uma tautologia sse $n \geqslant 2$ e n é par.