INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica e Computabilidade 2023.1

Prova 1

14 de junho de 2023

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou em listas de exercícios, devendo apenas ser quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.
Além disso, em qualquer árvore de avaliação, você pode trocar um julgamento $\varphi : \star$ no rótulo de um nó por qualquer julgamento $\psi : \star$ com ψ semanticamente equivalente a φ.
As equivalências "básicas" ou "clássicas" (como De Morgan e dupla negação) podem ser usadas livremente; equivalências mais sofisticadas devem ser provadas.

Questão 1 (2 pontos)**.** Uma certa ilha é composta de pessoas de dois tipos: cavaleiros (que sempre falam a verdade) e valetes (que sempre mentem, i.e., sempre falam coisas falsas). Naturalmente, os tipos são exclusivos: cada pessoa da ilha é de exatamente um dos dois tipos.

Em certo momento, você encontra duas pessoas da ilha, A e B, que dizem:

- A: "B é cavaleiro"
- B: "eu e A somos pessoas de tipos diferentes"

Podemos modelar essa situação com 4 fórmulas atômicas A_c, A_v, B_c, B_v (intuitivamente significando "A é cavaleiro", "A é valete", etc., respectivamente) e mais algumas fórmulas compostas:

$A_c \leftrightarrow \neg A_v$	[A é de um dos dois tipos, exclusivamente]
$B_c \leftrightarrow \neg B_v$	[B é de um dos dois tipos, exclusivamente]
$A_c \to B_c$	[se A é cavaleiro, então falou a verdade no encontro]
$A_v \to \neg B_c$	[se A é valete, então mentiu no encontro]
$B_c \to (A_c \leftrightarrow B_v)$	[se B é cavaleiro, então falou a verdade no encontro]
$B_v \to \neg(A_c \leftrightarrow B_v)$	[se B é valete, então mentiu no encontro]

Usando árvores de avaliação, diga se nessa situação é possível A ser valete, i.e., se é possível A_v ser verdadeiro no caso em que todas as fórmulas compostas acima sejam verdadeiras.

Questão 2.

Definição. Um conjunto de fórmulas da LC é chamado

- *satisfazível* se existe um contexto que torna todos os seus elementos verdadeiros simultaneamente;
- *finitamente satisfazível* se cada subconjunto finito seu é satisfazível.

Seja $\Sigma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ um conjunto infinito de fórmulas da LC. Recursivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$\begin{aligned} T_0 &= \text{uma árvore de avaliação completa cuja raiz é rotulada } \varphi_0 : V \\ S_n &= \text{a árvore de avaliação obtida de } T_n \text{ estendendo cada ramo aberto} \\ &\qquad \text{de } T_n \text{ com um novo nó rotulado } \varphi_{n+1} : V \\ T_{n+1} &= \text{uma árvore de avaliação completa obtida partindo de } S_n. \end{aligned}$$

a (1,5 pontos)**.** Faça a construção de T_3 para o caso específico em que $\Sigma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ é dado pela definição recursiva da Lista 2:

$$\varphi_n = \begin{cases} p \to q, & \text{se } n = 0 \\ \varphi_{n-1} \to p, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

b (2 pontos)**.** De volta ao caso geral, prove que se Σ é finitamente satisfazível, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que T_n possui pelo menos um ramo aberto.

c (2 pontos)**.** Prove o seguinte teorema.

Teorema (Teorema da Compacidade da LC)**.** *Um conjunto infinito de fórmulas da LC é satisfazível se e somente se é finitamente satisfazível.*

Você pode usar (**sem provar**) o seguinte resultado sobre árvores infinitas:

Teorema (Lema de Kőnig)**.** *Uma árvore (direcionada) binária infinita tem um ramo infinito, i.e., um caminho (direcionado) infinito começando em sua raiz.*

Dica: Em uma das direções, note que as árvores T_n "convergem" para uma grande árvore conforme $n \to \infty$. Lembre-se de como podemos definir um contexto a partir de um ramo aberto de uma árvore completa; isso também funciona para árvores infinitas!

Questão 3. Seja Y o conjunto das fórmulas da LC construídas usando apenas os símbolos proposicionais e os conectivos $\neg$, $\leftrightarrow$.

a (2 pontos)**.** Prove que, para toda fórmula $\varphi \in Y$, se φ possui pelo menos uma ocorrência do conectivo $\leftrightarrow$, então φ é V em uma quantidade par de linhas de sua tabela-verdade.

b (1,5 pontos)**.** Conclua que (ao contrário do que se pedia na Lista 2) o conjunto de conectivos $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *não* é completo.

Regras de Manipulação

ramo da árvore atual

ramo(s) expandido(s)