INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica e Computabilidade 2023.1

Prova 2

19 de julho de 2023

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala, em provas anteriores ou em listas de exercícios, devendo apenas ser claro quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. Considere a assinatura com igualdade e que tem apenas uma relação binária R, e seja Σ o conjunto das seguintes sentenças nessa assinatura:

$$\Sigma = \{\forall x\, \neg(xRx),\ \ \forall x\, \forall y\, (xRy \leftrightarrow yRx)\}.$$

Assim, os modelos de Σ (i.e., as estruturas dessa assinatura que satisfazem todas as sentenças em Σ) são os chamados “grafos simples”, i.e., os grafos tais que nenhum vértice está ligado a si mesmo, e tais que as arestas não têm direção (na verdade, cada aresta tem ambas as direções, o que vamos considerar que “dá no mesmo”).

Em cada item abaixo, adicione sentenças a Σ (mas **não altere** a assinatura!) de forma que os modelos do novo conjunto de sentenças necessariamente tenham as propriedades listadas. Se quiser, você pode adicionar uma quantidade infinita de sentenças a Σ. Sempre considere que “grafos” quer dizer “grafos simples”.

a (1 ponto)**.** Serem grafos completos.

b (1 ponto)**.** Terem algum conjunto independente com pelo menos 3 vértices (um *conjunto independente* em um grafo é um conjunto de vértices, tal que nenhum vértice desse conjunto tem aresta para nenhum outro vértice do conjunto).

c (1,5 ponto)**.** Serem grafos bipartidos (um grafo é *bipartido* se seus vértices podem ser separados em dois conjuntos, de forma que todas as arestas vão de algum vértice em um dos conjuntos para algum vértice no outro conjunto). Você pode usar (sem provar) o seguinte teorema: um grafo é bipartido se, e somente se, não tem nenhum ciclo de tamanho ímpar.

Questão 2 (3 pontos)**.** Prove que $\varphi, \psi \vdash \beta$, onde

$$\varphi := \forall x\, [(F(x) \wedge G(x)) \to H(x)] \quad \to \quad \exists x\, [F(x) \wedge (\neg G(x))]$$
$$\psi := \forall x\, [F(x) \to G(x)] \quad \vee \quad \forall x\, [F(x) \to H(x)]$$
$$\beta := \forall x\, [(F(x) \wedge H(x)) \to G(x)] \quad \to \quad \exists x\, [\langle F(x) \wedge G(x)\rangle \wedge \neg H(x)]$$

Não use o Teorema da Completude da LPO.

Questão 3. Considere a assinatura que tem igualdade e

- funções binárias $\oplus$ e $\odot$
- uma relação binária $\lhd$
- para cada número real r, uma constante c_r

Seja $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ a estrutura para essa assinatura que tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, onde $\oplus$, $\odot$ e $\lhd$ são interpretadas respectivamente como adição, multiplicação e “estritamente menor que”, e onde cada c_r é interpretada como o real r.

Finalmente, seja S o conjunto de todas as sentenças dessa assinatura que são verdadeiras na estrutura $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$. Por exemplo, as seguintes sentenças

$$\forall x\, [c_0 \neq x \ \to\ \exists y\, (x \odot y = c_1)]$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall x'\, \forall y'\, [(c_0 \lhd x \wedge x \odot y = c_1 \wedge x' \odot y' = c_1 \wedge x \lhd x') \to y' \lhd y]$$

estão em S, mas a seguinte sentença não está:

$$\exists x\, \forall y\, (y \lhd x).$$

a (1,5 ponto)**.** Seja Σ o seguinte conjunto de fórmulas

$$\Sigma = \mathsf{S} \cup \{c_0 \lhd x\} \cup \{x \lhd c_r \mid r \in \mathbb{R} \text{ e } r > 0\}.$$

Note que algumas das fórmulas em Σ são sentenças, e outras têm a variável x livre.

Prove que não existe interpretação i para $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ tal que $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}, i$ satisfaça todas as fórmulas em Σ simultaneamente.

b (2 pontos)**.** Dizemos que um conjunto Γ de fórmulas da LPO em alguma assinatura é *satisfazível* se existem uma estrutura $\mathcal{E}$ da assinatura e uma interpretação i para essa estrutura tal que $\mathcal{E}, i$ torna todas as fórmulas em Γ verdadeiras simultaneamente.

Assuma que o seguinte teorema é verdadeiro, sem precisar prová-lo:

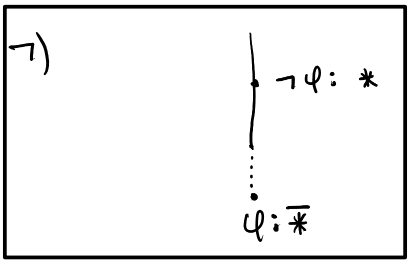
Teorema (Teorema da Compacidade da LPO)**.** *Seja Γ um conjunto de fórmulas da LPO em alguma assinatura. Então Γ é satisfazível se, e somente se, cada subconjunto finito de Γ é satisfazível.*

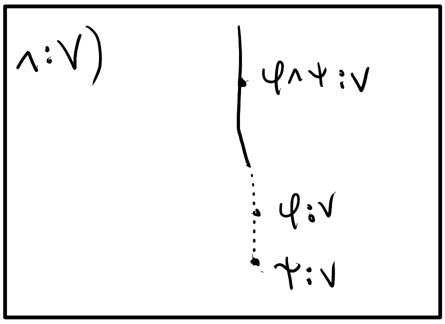
Prove que Σ é satisfazível.

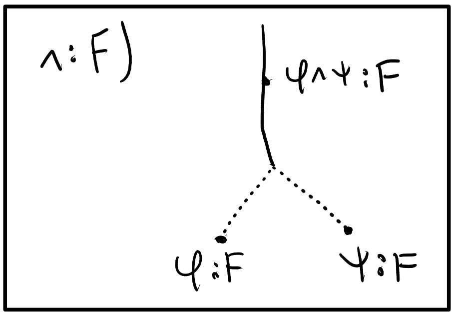
Regras de Manipulação

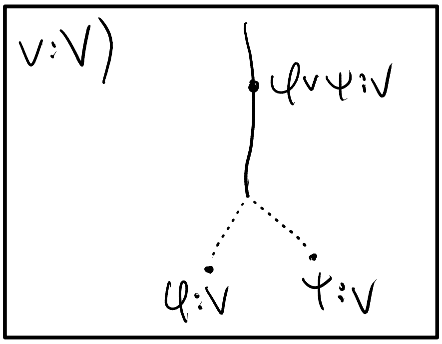
ramo da árvore atual

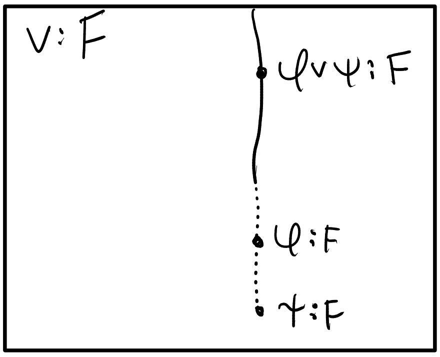
ramo(s) expandido(s)

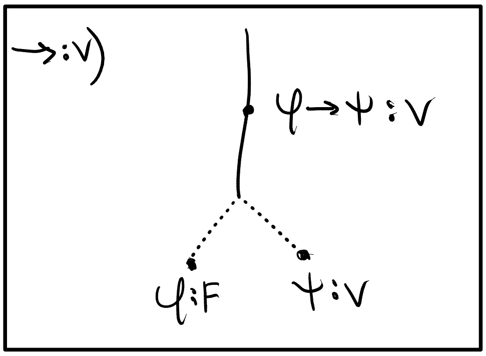


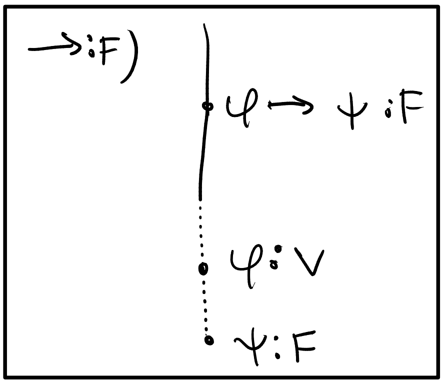


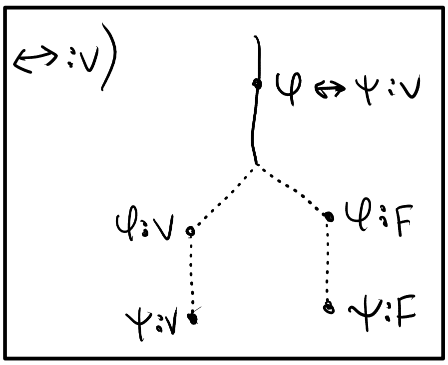


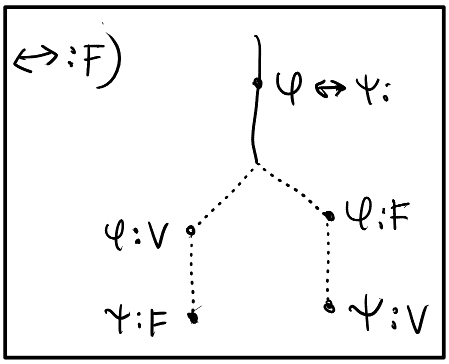


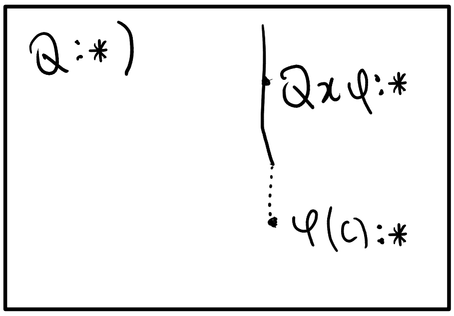












onde

- Q é $\forall$ ou $\exists$
- * é V ou F
- Nas regras $\forall$:V e $\exists$:F, c é <u>qualquer</u> constante
- Nas regras $\forall$:F e $\exists$:V, c é qualquer constante nova da assinatura e que ainda não tenha sido usada na árvore em aplicações de regras $\forall$:F ou $\exists$:V