Lógica e Computabilidade 2023.2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 1

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!
Entregue todas as questões marcadas com * até
20 de setembro às 23:59.

Questão 1.

Definição 1.
1. Uma *árvore ternária* é uma árvore (não vazia) na qual cada nó tem nó máximo 3 filhos;
2. Uma *árvore estritamente ternária* é uma árvore ternária na qual cada nó tem 0 ou 3 filhos.

*** a.** Dê definições recursivas desses dois conceitos.

*** b.** Prove que para toda árvore estritamente ternária, a sua quantidade de nós deixa resto 1 quando dividida por 3.

Questão 2.

Definição 2. Uma *árvore de busca binária* é uma árvore binária onde cada nó está associado a um inteiro, satisfazendo que o valor em cada nó é

- maior ou igual ao valor associado ao seu filho esquerdo (se tiver filho esquerdo)
- menor ou igual ao valor associado ao seu filho direito (se tiver filho direito)

a. Dê uma definição recursiva desse conceito.

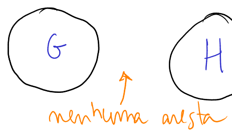
b. Defina, por recursão uma função de *busca* nessas árvores: a entrada deve ser um inteiro x e uma árvore de busca binária T, e a saída deve ser V ou F dependendo se a árvore tem algum nó associado ao valor x ou não, respectivamente.

Questão 3.

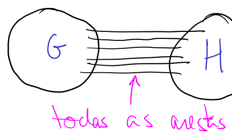
Definição 3. O conceito de *cografo* é definido recursivamente pelas seguintes regras:

B) O grafo com 1 vértice e 0 arestas é um cografo;

R1) Se G e H são cografos, então sua união disjunta também é;

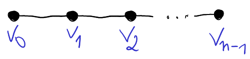


R2) Se G e H são cografos, seu *join* (i.e., o grafo obtido da união disjunta de G e H adicionando *todas* as arestas entre vértices de G e H) também é.



a.

Definição 4. Dado $n \geqslant 1$, denotamos por P_n o *grafo caminho* com n vértices (e portanto $n-1$ arestas):



Dê uma definição recursiva para esses grafos.

* **b.** Prove que P_3 é um cografo.

* **c.**

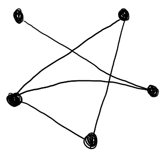
Definição 5. Sejam G e H grafos. Dizemos que H é um *subgrafo induzido* de G se:

- todo vértice de H é um vértice de G, e
- para toda aresta de G, se ambos os vértices dessa aresta estão em H, então a aresta também está em H.

Em outras palavras, H é subgrafo induzido de G sse podemos obter H a partir de G removendo apenas vértices (e todas as arestas incidentes aos vértices removidos).

Prove por indução que nenhum cografo tem P_4 como subgrafo induzido.

*** d.** Prove que o grafo abaixo não é um cografo.



***Questão 4.** Considere o alfabeto Σ cujos elementos são apenas os símbolos `)` e `(`. Assim, `)()()((` e `()()(())` são palavras nesse alfabeto.

Definição 6. Dizemos que uma palavra deste alfabeto é *balanceada* se, ao começarmos uma contagem com 0 no início da palavra e a percorrermos,

- somando 1 a cada `(` encontrado e
- subtraindo 1 a cada `)` encontrado,

chegaremos ao fim da palavra novamente com a contagem 0, sem nunca termos passado por um valor negativo ao longo do processo.

Intuitivamente, essas são exatamente as palavras obtidas a partir de expressões aritméticas bem formadas, apagando tudo o que não for parêntese.[1] Assim, `()()(())` é balanceada pois `(1+1)+(1+1)+(1+(1+1))` é uma expressão aritmética bem formada.

Dê uma definição recursiva para o conjunto das palavras balanceadas e prove que todas as palavras que são balanceadas de acordo com a sua definição são balanceadas também de acordo com a definição acima. Você não precisa provar a recíproca.

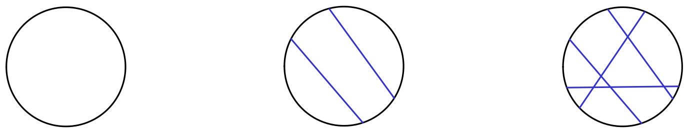
***Questão 5.**

Definição 7. Vamos definir o conceito de um *mapa de cordas* recursivamente da seguinte forma:

B) Um círculo é um mapa de cordas;

R) Dado um mapa de cordas X, o resultado de adicionar uma nova *corda* à circunferência externa de X (i.e., um segmento de reta ligando dois pontos distintos da circunferência) é também um mapa de cordas.

Veja três exemplos de mapas de linhas na figura abaixo:



[1] Atenção, essa é apenas uma intuição! A definição de fato é dada pela regra acima.

Prove que todo mapa de cordas é 2-colorível, i.e., que sempre é possível colorir qualquer mapa de cordas usando apenas duas cores, de forma que regiões vizinhas do mapa recebam cores diferentes. Considere como vizinhas apenas regiões que se encontrem ao longo de algum segmento de reta, i.e., não considere como vizinhas regiões que se encontrem em apenas um ponto (essas podem receber a mesma cor sem problemas).

Questão 6.

Definição 8.

1. Dizemos que um polígono é *convexo* se nenhum segmento de reta ligando lados distintos do polígono encontra algum outro lado (i.e., se todo segmento de reta entre lados distintos do polígono fica completamente no interior do polígono).
2. Uma *diagonal* de um polígono convexo é um segmento de reta que liga dois vértices não-consecutivos do polígono (i.e., é um segmento de reta que liga dois vértices do polígono, desde que esse segmento não seja um dos lados do polígono).
3. Uma *triangulação* de um polígono convexo é um conjunto de triângulos com as propriedades:
   (a) Os vértices dos triângulos são vértices do polígono original;
   (b) As arestas dos triângulos não se cruzam, i.e., só podem se encontrar em vértices ou coincidirem exatamente;
   (c) Os triângulos cobrem exatamente o polígono todo (sem sobra nem falta).

   Em outras palavras, uma triangulação de um polígono é a adição de segmentos de retas entre seus vértices, de forma que esses segmentos não se cruzem, e tal que na nova figura todas as regiões formadas sejam triângulos.

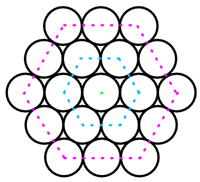
* **a.** Prove por indução que todo polígono convexo com $n \geqslant 3$ vértices possui exatamente $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

* **b.** Prove por indução que toda triangulação de polígono convexo com $n \geqslant 3$ vértices possui exatamente $n-2$ triângulos.

* **c.** Prove por indução que, para todo polígono convexo P com $n \geqslant 4$ vértices e toda diagonal d de P, há uma triangulação de P na qual d é a aresta de algum dos triângulos.

Questão 7.

Definição 9. Vamos dizer que um número natural n é *compacto* se, ao organizarmos n moedas de mesmo tamanho formando um "padrão hexagonal", como na figura abaixo, o padrão pode ser completando formando um hexágono externo.[2]



Assim, 1, 7 e 19 são compactos (pela figura acima), mas 9 não é. O nome "compacto" vem do fato desta ser a forma mais eficiente de se cobrir o plano com círculos de mesmo tamanho, fato provado por Lagrange no século XVIII. Esse é um caso particular do problema de *empacotamento de esferas*.

* **a.** Dê uma definição recursiva para o conjunto dos números compactos.

b. 129 é um número compacto?

Questão 8. No jogo de xadrez, o cavalo se move em "L", i.e., andando 2 casas na horizontal/vertical e 1 casa na vertical/horizontal (respectivamente).

a. Prove que, para qualquer $n \geqslant 4$, um cavalo começando na casa do canto inferior esquerdo de um tabuleiro $n \times n$ consegue chegar a qualquer outra casa do tabuleiro em uma quantidade finita de movimentos.

b. Prove que o mesmo vale mesmo sem assumirmos que o cavalo começa no canto inferior esquerdo do tabuleiro, i.e., prove que para todo $n \geqslant 4$ o cavalo consegue chegar de qualquer casa a qualquer casa de um tabuleiro $n \times n$.

Questão 9. Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere um tabuleiro quadrado subdividido em $2^{2n} = 4^n$ quadrados. Em outras palavras, o tabuleiro inteiro é um "quadradão" com lado 2^n "quadradinhos". Considere o seguinte jogo: primeiramente um quadrado Q do tabuleiro é escolhido por seu pior inimigo. Em seguida, usando apenas peças que cobrem 3 quadradinhos em formato "L", o seu objetivo como jogador é cobrir o tabuleiro todo *exceto* pelo quadrado Q, que deve permanecer descoberto. Cada peça deve cobrir 3 quadradinhos do tabuleiro, sem que as peças se sobreponham.

(Veja um possível estágio intermediário do "jogo" para o caso $n = 4$ na figura abaixo — não há nenhuma garantia sobre esse estágio intermediário ser

[2] Vamos forçar um pouco a barra e dizer que uma única moeda também forma um hexágono.

bom ou ruim para se obter uma solução final! Na figura, as linhas tracejadas estão presentes apenas para facilitar a visualização)

Prove, por indução, que esse jogo pode ser vencido para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer escolha do quadrado Q.