Lógica e Computabilidade 2023.2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!
Entregue todas as questões marcadas com * até
11 de dezembro às 23:59

Questão 1. Considere uma assinatura com igualdade.

Mostre que os seguintes "quantificadores generalizados" são expressíveis usando apenas os símbolos usuais da LPO vistos em aula, i.e., com os quantificadores $\forall$ e $\exists$. Assim, em cada caso, você deve encontrar uma fórmula da LPO comum, na mesma assinatura, que seja semanticamente equivalente à fórmula desejada.

Em toda esta questão, seja $n \geqslant 1$ um número natural qualquer.

*** a.** $\exists^{\geqslant n} x\ \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, i \vDash \exists^{\geqslant n} x\ \varphi$$
sse
existem pelo menos n elementos distintos $d \in D(\mathcal{E})$ tais que $\mathcal{E}, i\left[\frac{d}{x}\right] \vDash \varphi$

*** b.** $\exists^{\leqslant n} x\ \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, i \vDash \exists^{\leqslant n} x\ \varphi$$
sse
existem no máximo n elementos distintos $d \in D(\mathcal{E})$ tais que $\mathcal{E}, i\left[\frac{d}{x}\right] \vDash \varphi$

c. $\exists^{=n} x\ \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, i \vDash \exists^{=n} x\ \varphi$$
sse
existem exatamente n elementos distintos $d \in D(\mathcal{E})$ tais que $\mathcal{E}, i\left[\frac{d}{x}\right] \vDash \varphi$

Questão 2. Considere uma assinatura com dois símbolos para relações: P (unário) e R (binário). Prove ou refute o que é afirmado em cada item abaixo. Lembrete: nossos modelos sempre têm universos não vazios.

a. $P(x) \vDash P(x)$

b. $P(x) \vDash P(y)$

c. $P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

d. $\forall x\, P(x) \vDash P(x)$

e. $\forall x\, P(x) \vDash \exists x\, P(x)$

f. $\exists x\, P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

* **g.** $\forall x\, \exists y\, (xRy) \vDash \exists x\, \forall y\, (xRy)$

h. $\exists x\, \forall y\, (xRy) \vDash \forall x\, \exists y\, (xRy)$

* **i.** $\vDash \exists x\, (P(x) \to \forall y\, (P(y)))$

j. $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

* **k.** Se x não ocorre livre em φ, então $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

l. $\vDash \varphi$ se, e somente se $\vDash \forall x\, \varphi$

Questão 3. Chamamos de *modelagem* o processo de formalizar (simbolizar) frases ou argumentos da linguagem natural para a LPO usando alguma assinatura apropriada. Deve-se indicar a correspondência entre os componentes da frase de linguagem natural e os símbolos da linguagem formal.

Por exemplo, para a frase "eu nunca como manga e bebo leite no mesmo dia", poderíamos ter:

Natural	Simbólico
eu como manga no dia x	$M(x)$
eu bebo leite no dia x	$L(x)$

também estipulando que as variáveis $x, y, z, \ldots$ correspondem a dias.

De acordo com essa correspondência, a frase dada cima pode ser modelada por

$$\forall x\, \neg(M(x) \wedge L(x)).$$

Cada frase pode ser modelada de diversas formas diferentes.

Dê modelagens para cada frase abaixo.

a. "Ninguém gosta de todo mundo."

b. "Toda pessoa que tem um filho deveria ser carinhosa com ele."

*** c.** "Você consegue enganar algumas pessoas em alguns momentos, mas não consegue enganar todas as pessoas em todos os momentos."

d. "Nem toda fruta é gostosa, algumas são, mas nenhuma fruta cítrica é."

Questão 4.

Definição. Seja $\mathcal{E}$ uma estrutura para uma certa assinatura $\mathcal{A}$.

- Seja $d \in D(\mathcal{E})$. Dizemos que uma fórmula φ *define* d em $\mathcal{E}$ se:
  - φ tem exatamente uma variável livre
  - "d é único elemento de $D(\mathcal{E})$ que satisfaz φ", i.e., para todo $e \in D(\mathcal{E})$ temos
    $$\mathcal{E} \vDash \varphi[\![e]\!] \quad \text{sse} \quad e = d$$
- Seja $X \subseteq D(\mathcal{E})$. Dizemos que uma fórmula φ *define* X em $\mathcal{E}$ se:
  - φ tem exatamente uma variável livre
  - "Os elementos de X são os únicos elementos em $D(\mathcal{E})$ que satisfazem φ", i.e., para todo $d \in D(\mathcal{E})$ temos
    $$\mathcal{E} \vDash \varphi[\![d]\!] \quad \text{sse} \quad d \in X$$
- Seja R uma relação n-ária em $D(\mathcal{E})$. Dizemos que uma fórmula φ *define* R em $\mathcal{E}$ se:
  - φ tem exatamente n variáveis livres
  - "as tuplas relacionadas por R são as únicas em $D(\mathcal{E})$ que satisfazem φ", i.e., para todos $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E})$ temos
    $$\mathcal{E} \vDash \varphi[\![d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}]\!]$$
    $$\text{sse}$$
    $$(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}) \text{ estão relacionados por R.}$$

Por exemplo, considere a assinatura com igualdade, sem constantes, sem relações e com dois símbolos para funções binárias $\oplus$ e $\odot$. Seja $\mathcal{N}$ e estrutura para essa assinatura com domínio $\mathbb{N}$, onde as funções são interpretadas respectivamente como soma e produto de naturais. Então a fórmula

$$\varphi : \quad x \oplus x = x$$

define o elemento 0 em $\mathcal{N}$, pois de fato 0 é o único número natural que é o dobro de si próprio.

Dê definições em $\mathcal{N}$ para os itens listados abaixo:

*** a.** O elemento 1.

b. O conjunto dos números pares.

c. O conjunto dos números quadrados perfeitos.

d. Para um dado natural n, o conjunto dos divisores naturais de n.

* **e.** O conjunto dos números primos (considere que 0 e 1 não são primos).

f. A relação binária "é o sucessor de".

* **g.** A relação binária "menor ou igual".

* **h.** A relação ternária "está entre", i.e., a relação que vale para uma tripla (a, b, c) sse b fica entre (ou igual) a e c na reta numérica.

i. A relação quaternária "dividendo, divisor, quociente, resto", que vale para uma tupla (a, b, c, d) sse a divisão inteira de a por b tem quociente c e resto d.

Questão 5. Em cada item abaixo, defina uma assinatura e encontre uma sentença φ dessa assinatura com a propriedade desejada. Lembre-se de que você tem liberdade de colocar os símbolos que quiser na assinatura, podendo então usar φ para fazê-los "se comportarem" de alguma forma desejada em cada modelo.

Por exemplo, para "os modelos de φ têm exatamente 1 elemento", poderíamos ter uma assinatura com igualdade e fazer φ ser $\forall x \, \forall y \, (x = y)$.

a. Os modelos de φ têm exatamente n elementos, sendo $n \geqslant 2$ um número natural qualquer.

b. Os modelos de φ não podem ser finitos de tamanho ímpar (ou seja, podem ser infinitos, ou finitos de tamanho par apenas).

* **c.** Os modelos de φ são infinitos.