INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica e Computabilidade 2023.2

Prova 1

10 de novembro de 2023

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou em listas de exercícios, devendo apenas ser quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1 (2 pontos)**.** Você ganhou um camaleão de presente, e pesquisando, descobriu os seguintes fatos: A. O camaleão está feliz se e somente se ele não está chateado; B. O camaleão fica roxo quando está chateado e amarelo quando está feliz; C. Sempre que o camaleão está com fome, ele fica chateado; D. Se o camaleão está comendo e você faz carinho nele, ele fica chateado; E. Se seu pote de comida está vazio, então o camaleão está com fome; F. Se o pote de comida não está vazio e o camaleão está com fome, então ele com certeza está comendo; G. Quando o camaleão dorme bastante, ele fica feliz.

Em um certo momento, você está fazendo carinho no camaleão e ele não está roxo. O pote de comida dele pode estar vazio? Prove sua resposta usando árvores de avaliação.

Questão 2. Nesta questão, considere a versão da LC que é estendida com as fórmulas atômicas $\top$ (sempre verdadeira) e $\bot$ (sempre falsa), como visto em sala e listas de exercícios.

a (1 ponto)**.** Dada uma fórmula φ da LC, denotamos por $\mathsf{SP}(\varphi)$ o conjunto dos símbolos proposicionais que ocorrem em φ. Dê uma definição recursiva para $\mathsf{SP}(\varphi)$.

b (1,5 pontos)**.** Prove que, para quaisquer fórmulas φ e ψ da LC, se

- $\varphi \vDash \psi$;
- φ não é contradição (ou seja, $\varphi \not\vDash\!\!\dashv \bot$); e
- ψ não é tautologia (ou seja, $\top \not\vDash\!\!\dashv \psi$),

então $\mathsf{SP}(\varphi) \cap \mathsf{SP}(\psi) \neq \varnothing$.

c (1,5 pontos)**.** Prove que para todo par de fórmulas φ, ψ e símbolo proposicional p que ocorre em φ mas não em ψ, então temos

$$\varphi \vDash \varphi\left[\frac{\top}{p}\right] \vee \varphi\left[\frac{\bot}{p}\right] \qquad \text{e} \qquad \text{se } \varphi \vDash \psi \text{ então } \varphi\left[\frac{\top}{p}\right] \vee \varphi\left[\frac{\bot}{p}\right] \vDash \psi,$$

onde (como sempre) a notação entre colchetes significa que, na fórmula φ, toda ocorrência do símbolo no "denominador" é substituída pela fórmula no "numerador".

d (2 pontos)**.** Prove o seguinte resultado, conhecido como *Lema de Interpolação*: para quaisquer fórmulas φ e ψ, se $\varphi \vDash \psi$, φ não é contradição e ψ não é tautologia, então existe uma fórmula β (chamada "interpolante") tal que

- $\varphi \vDash \beta$;
- $\beta \vDash \psi$; e
- $\mathsf{SP}(\beta) \subseteq \mathsf{SP}(\varphi) \cap \mathsf{SP}(\psi)$.

(Em outras palavras, a relação de consequência semântica só pode "realmente" depender dos símbolos proposicionais comuns às duas fórmulas.)

Dica: indução (!) na quantidade de símbolos proposicionais de φ que não ocorrem em ψ.

Questão 3 (3 pontos)**.** Sejam φ uma fórmula da LC e A uma árvore de avaliação completa para $\varphi : V$. Dados conectivos binários $\bullet, \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, seja φ^A a fórmula $q \wedge (\neg q)$, se A não tem nenhum ramo aberto, caso contrário seja φ^A definida pelo seguinte procedimento:

- Para cada ramo aberto r de A, sendo $p_0 : \star_0$, $p_1 : \star_1$, ..., $p_n : \star_n$ os julgamentos atômicos que ocorrem em r, seja

$$\varphi_r = \tilde{p}_0 \bullet \tilde{p}_1 \bullet \cdots \bullet \tilde{p}_n$$

(associando para a esquerda), onde para cada $i \leqslant n$ fazemos

$$\tilde{p}_i = \begin{cases} p_i, & \text{se } \star_i = V \\ \neg p_i, & \text{se } \star_i = F. \end{cases}$$

- Finalmente, seja

$$\varphi^A = \varphi_{r_0} \circ \varphi_{r_1} \circ \cdots \circ \varphi_{r_k}$$

(associando para a esquerda), onde $r_0, r_1, \ldots, r_k$ são todos os ramos abertos de A.

Quais devem ser os conectivos $\bullet, \circ$ para que tenhamos o seguinte teorema? "Para toda fórmula φ e toda árvore de avaliação completa A para $\varphi : V$, temos $\varphi^A \,\vDash\!\!\dashv\, \varphi$." Você não precisa provar em detalhes o teorema para a sua resposta, mas deve dar uma justificativa para a sua escolha de $\bullet, \circ$. (*Curiosidade que não vale ponto*: qual a forma normal que você obteve?)

Regras de Manipulação

ramo da árvore atual

ramo(s) expandido(s)