INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou em listas de exercícios, devendo apenas ser quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1 (3,5 pontos)**.** Sejam $\mathcal{A}$ uma assinatura e $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ estruturas para $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{E}_0$ é uma *subestrutura* de $\mathcal{E}_1$ se

- o domínio $D(\mathcal{E}_0)$ de $\mathcal{E}_0$ é um subconjunto do domínio $D(\mathcal{E}_1)$ de $\mathcal{E}_1$, i.e.,
$$D(\mathcal{E}_0) \subseteq D(\mathcal{E}_1)$$
- para cada símbolo para constante c de $\mathcal{A}$, temos
$$c^{\mathcal{E}_0} = c^{\mathcal{E}_1}$$
- para cada símbolo para operação n-ária op de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \dots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E}_0)$, temos
$$\mathrm{op}^{\mathcal{E}_0}(d_0, \dots, d_{n-1}) = \mathrm{op}^{\mathcal{E}_1}(d_0, \dots, d_{n-1})$$
- para cada símbolo para relação n-ária R de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \dots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E}_0)$, temos
$$R^{\mathcal{E}_0}(d_0, \dots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{\mathcal{E}_1}(d_0, \dots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira}$$

Suponha que $\mathcal{E}_0$ seja subsestrutura de $\mathcal{E}_1$ e seja φ uma fórmula da LPO na assinatura $\mathcal{A}$, sem ocorrências de quantificadores, e tal que $\exists x\, \varphi$ é uma sentença.

Prove que se $\mathcal{E}_0 \vDash \exists x\, \varphi$ então $\mathcal{E}_1 \vDash \exists x\, \varphi$, mas que a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Questão 2 (3,5 pontos)**.** Seja $\mathcal{A}$ a assinatura com igualdade, 1 símbolo para operação binária $*$ e 1 símbolo para constante e. Um *monoide* é uma estrutura para essa assinatura que satisfaça as seguintes sentenças[2]:

- $\forall x\, (x * e = x)$ (*elemento neutro à direita*)
- $\forall x\, (e * x = x)$ (*elemento neutro à esquerda*)
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [x * (y * z) = (x * y) * z]$ (*associatividade*)
- $\forall x\, (x = x)$ (*reflexividade*)
- $\forall x\, \forall y\, (x = y \to y = x)$ (*simetria*)
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(x = y \land y = z) \to x = z]$ (*transitividade*)

[2] há mais axiomas envolvendo igualdade, mas eles não vêm ao caso para essa questão

Sendo Σ o conjunto de sentenças acima, prove usando árvore de avaliação que

$$\Sigma \vdash \forall y \, \langle [(\forall x \, (x * y = x)) \wedge (\forall x \, (y * x = x))] \rightarrow y = e \rangle$$

(Ou seja: “em um monoide qualquer, o elemento neutro é único”.)

Questão 3.

a (2 pontos)**.** Sejam $\mathcal{A}_0$ a assinatura com 1 símbolo para relação binária R e

- $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ a estrutura para $\mathcal{A}_0$ com domínio o conjunto dos números reais, com R denotando a relação “estritamente menor que” dos reais;
- $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ a subestrutura de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ com domínio o conjunto dos números naturais.

Dê exemplo de fórmula φ dessa assinatura tal que $\mathcal{E}_{\mathbb{R}} \vDash \varphi$ e $\mathcal{E}_{\mathbb{N}} \nvDash \varphi$.

b (2 pontos)**.** Sejam $\mathcal{A}_1$ a assinatura com 1 símbolo para relação binária R, mais 1 símbolo $*$ para operação binária, e

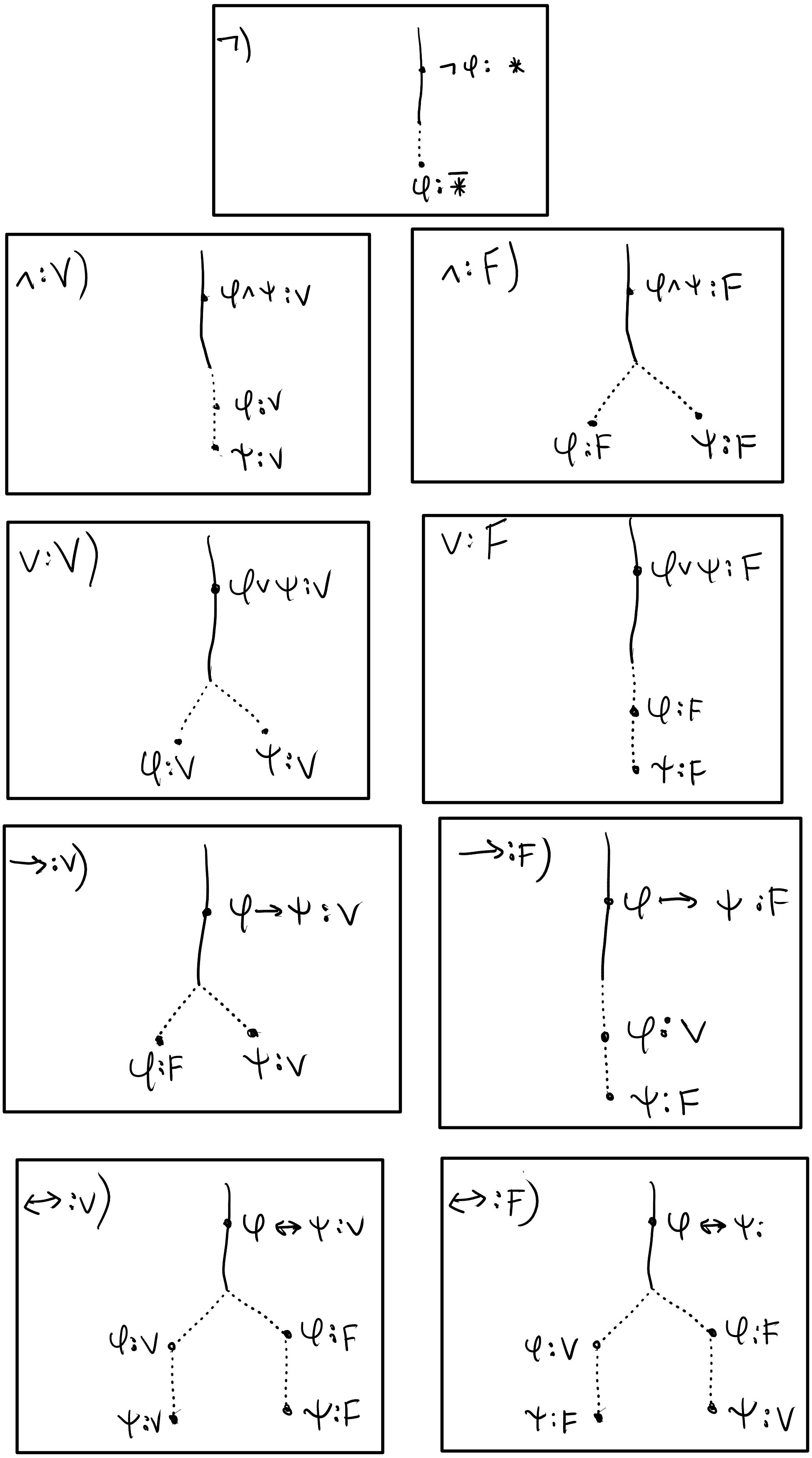
- $\mathcal{E}'_{\mathbb{R}}$ a estrutura para $\mathcal{A}_1$ com domínio o conjunto dos números reais, com R denotando a relação “estritamente menor que” dos reais e $*$ denotando a operação de multiplicação de reais;
- $\mathcal{E}'_{\mathbb{Q}}$ a subestrutura de $\mathcal{E}'_{\mathbb{R}}$ com domínio o conjunto dos números racionais.

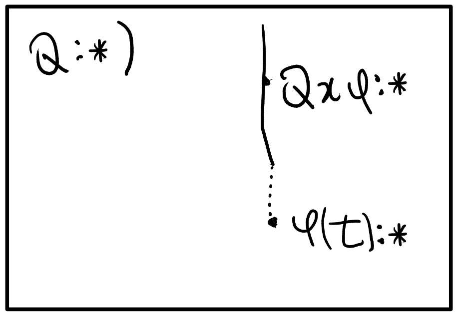
Dê exemplo de fórmula ψ dessa assinatura tal que $\mathcal{E}'_{\mathbb{Q}} \vDash \psi$ e $\mathcal{E}'_{\mathbb{R}} \nvDash \psi$.

Regras de Manipulação

ramo da árvore atual

ramo(s) expandido(s)





onde

- Q é $\forall$ ou $\exists$
- * é V ou F
- Nas regras $\forall$:V e $\exists$:F, t é qualquer termo fechado da assinatura expandida.
- Nas regras $\forall$:F e $\exists$:V, t é qualquer constante nova da assinatura expandida que ainda não tenha sido usada na árvore em aplicações de regras $\forall$:F ou $\exists$:V