Teoria de Categorias & Programação Funcional
2023.2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 1

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!
Entregue todas as questões marcadas com * até
2 de outubro às 23:59

Questão 1. Para cada item abaixo, responda o que é perguntado, sempre justificando sua resposta.

a. A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: todos os conjuntos finitos
- Setas: todas as funções entre conjuntos finitos
- dom, cod, id, composta: como usual para funções

*** b.** Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma função $f :: A \to B$ é *n-limitada* se para qualquer $b \in B$ temos que existem no máximo n elementos $a \in A$ diferentes tais que $f(a) = b$. Assim "1-limitada" é sinônimo de "injetiva".

Seja $n \geqslant 2$ um natural qualquer. A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: todos os conjuntos
- Setas: todas as funções n-limitadas
- dom, cod, id, composta: como usual para funções

c. A especificação abaixo é uma categoria?

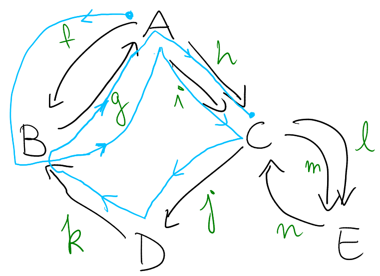
- Objetos: todos os conjuntos
- Setas: todas as funções 1-limitadas (definição dada no item (b) acima)
- dom, cod, id, composta: como usual para funções

*** d.** Seja G um grafo (o mais "geral" possível, i.e., temos apenas um conjuntos de pontos e um conjunto de setas entre eles sem nenhuma exigência a mais, podendo haver laços, setas múltiplas entre um mesmo par de pontos, etc). Chamamos de um *passeio* em G uma sequência

$$(v_0, a_0, v_1, a_1, v_2, \ldots, v_{i-2}, a_{i-2}, v_{i-1})$$

onde cada v_j é um vértice do grafo e cada a_j é uma seta ("arco", na nomenclatura usual de grafos) no grafo apontando de v_j para v_{j+1}. Note que passeios devem começar e terminar em vértices.

No exemplo abaixo, $(A, f, B, g, A, i, C, j, D, k, B, g, A, h, C)$ é um passeio, mas (A, f, B, k, D) não é.



A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: os vértices de G
- Setas: os passeios em G
- dom: o vértice onde começa o passeio
- cod: o vértice onde termina o passeio
- (para cada objeto v) id(v): o passeio (v), i.e., o passeio que começa e termina em v sem passar por nenhuma seta para outro vértice
- composta: concatenação, mas antes removendo o último vértice do primeiro passeio:

$$\begin{aligned}(v_0, a_0, v_1, \ldots, a_{i-2}, v_{i-1})\,;(v'_0, a'_0, v'_1, \ldots, a'_{j-2}, v'_{j-1})&\\ = (v_0, a_0, v_1, \ldots, a_{i-2}, v'_0, a'_0, v'_1, \ldots, a'_{j-2}, v'_{j-1})&\end{aligned}$$

e. Dado um grafo G (novamente o mais "geral" possível), chamamos de um *caminho* em G um passeio em G que não passe duas vezes por nenhum vértice nem nenhuma seta.

No exemplo anterior, $(A, f, B, g, A, i, C, j, D, k, B, g, A)$ não é um caminho, mas (A, h, C, j, D, k, B) é.

A especificação abaixo é uma categoria?

- Objetos: os vértices de G
- Setas: os caminhos em G
- dom, cod, id, composta: exatamente como para passeios

* **f.** *A construção da categoria dual ou "oposta".*

Dada uma categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}_\mathcal{C}, \mathcal{A}_\mathcal{C}, \mathrm{dom}_\mathcal{C}, \mathrm{cod}_\mathcal{C}, \mathrm{id}_\mathcal{C}, \ ;_\mathcal{C})$, a especificação abaixo $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ é uma categoria?

- Objetos: $\mathcal{O}_\mathcal{C}$
- Setas: $\mathcal{A}_\mathcal{C}$
- dom: $\mathrm{cod}_\mathcal{C}$
- cod: $\mathrm{dom}_\mathcal{C}$
- id: $\mathrm{id}_\mathcal{C}$
- composta: $f \,;\, g = g \,;_\mathcal{C}\, f$

Questão 2. Como vimos em aula, intuitivamente, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias, então "apenas colocar cópias de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ lado a lado, sem interações entre elas" também parece ser uma categoria.

Dê uma descrição precisa dessa construção e prove que o resultado de fato é uma categoria. Para facilitar, você pode assumir que os objetos e setas de $\mathcal{C}$ não aparecem em $\mathcal{D}$ (i.e., as categorias são completamente "disjuntas").

Questão 3. Se uma categoria tem exatamente n objetos...

a. existe uma quantidade *mínima* de setas que ela deve ter?

b. existe uma quantidade *máxima* de setas que ela pode ter?

Questão 4. Um *monoide* é uma estrutura $(M, *, e)$ de assinatura "1 universo, 1 operação binária, 1 constante", satisfazendo os seguintes axiomas:

- "associatividade": $(x * y) * z = x * (y * z)$
- "elemento neutro": $x * e = x = e * x$

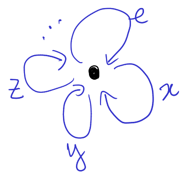
a. Dê a definição de "homomorfismo de monoides".

* **b.** Agora seja $(M, *, e)$ um monoide qualquer. Prove que a seguinte especificação é uma categoria:

- Objetos: apenas um, $\bullet$
- Setas: os elementos de M
- dom, cod: funções constantes com saída $\bullet$ para qualquer entrada

- $\mathrm{id}(\bullet) =$ o elemento neutro e do monoide
- composta: a operação $*$ do monoide

$M = \{e, x, y, z, \ldots\}$



c. Agora seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer. Prove que, para qualquer objeto X de $\mathcal{C}$, temos que $(M, *, e)$ é um monoide, onde

$$\begin{aligned} M &= \text{coleção das setas de } \mathcal{C} \text{ com domínio e contradomínio } X \\ * &= \text{a composta de } \mathcal{C} \text{ restrita a } M \\ e &= \text{a identidade de } X \text{ em } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

*** d.** Prove que homomorfismos entre monoides (vistos da forma usual) “são o mesmo” que funtores entre os monoides vistos como categorias (como descrito no item (b)): pode-se fazer cada homomorfismo corresponder a exatamente um funtor, e cada funtor também corresponder a exatamente um homomorfismo, de maneira que essas correspondências sejam inversas uma da outra (partindo de um homomorfismo, indo para o funtor correspondente, e depois para o homomorfismo correspondente a esse, volta-se ao homomorfismo original, e analogamente começando-se em um funtor).

Questão 5. Seja $\mathsf{Set}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{inj}}$ a categoria onde os objetos são os conjuntos finitos, as setas são as funções injetivas entre conjuntos finitos, e o restante como usual para funções.

Seja também $\mathsf{Nat}_{\leqslant}$ a categoria “poset” definida a partir dos números naturais e sua ordem $\leqslant$ usual [lembrete: os objetos são os naturais, e entre cada par de naturais n, m colocamos uma seta sse[1] $n \leqslant m$].

Definimos um funtor $F :: \mathsf{Set}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{inj}} \to \mathsf{Nat}_{\leqslant}$ da seguinte forma: para cada objeto X de $\mathsf{Set}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{inj}}$, definimos $F(X) :=$ a quantidade de elementos de X. Complete a definição e prove que o resultado é de fato um funtor.

***Questão 6** (“Funtor preimagem”)**.** Prove que a seguinte definição é um funtor. Definimos $\wp^{\mathrm{pre}} :: \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ da seguinte forma.

- Dado um objeto X da categoria Set, definimos

$$\wp^{\mathrm{pre}}(X) := \wp(X) = \text{conjunto das partes de } X$$

[1] se, e somente se

- Dada uma seta $f :: X \to Y$ da categoria Set, temos que definir uma seta
$$\wp^{\mathrm{pre}}(f) :: \wp^{\mathrm{pre}}(X) \to \wp^{\mathrm{pre}}(Y),$$
na categoria $\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$, o que (pelo exercício 1(f)) é a mesma coisa que uma seta
$$\wp^{\mathrm{pre}}(f) :: \wp^{\mathrm{pre}}(Y) \to \wp^{\mathrm{pre}}(X),$$
na categoria Set.

  Em outras palavras, precisamos definir uma **função** de $\wp(Y)$ para $\wp(X)$! Fazemos isso definindo, para cada $A \in \wp(Y)$:
$$\begin{aligned}(\wp^{\mathrm{pre}}(f))(A) := f^{-1}[A] = \{x \in X \ ; \ f(x) \in A\}& \\ = \text{“a pré-imagem de } A \text{ por } f\text{”}.&\end{aligned}$$

Questão 7. Vamos definir em detalhes a categoria Cat de todas as categorias. Os objetos são todas as categorias, e as setas são todos os funtores. Complete a definição (definindo dom, cod, id e composta) e prove que sua definição dá, de fato, uma categoria.

Questão 8 (Subestruturas)**.** Dadas duas estruturas $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ de uma mesma assinatura, dizemos que $\mathfrak{M}$ é uma *subestrutura* de $\mathfrak{N}$ se:

- Para cada universo U na assinatura, a sua interpretação $U_{\mathfrak{M}}$ em $\mathfrak{M}$ é um subconjunto da interpretação $U_{\mathfrak{N}}$ em $\mathfrak{N}$.
$$\text{para todo universo } U \text{ na assinatura:} \qquad U_{\mathfrak{M}} \subseteq U_{\mathfrak{N}}$$

- para cada operação na assinatura, realizar a operação em elementos de $\mathfrak{M}$ de acordo com a interpretação de $\mathfrak{M}$ para a operação dá no mesmo que operar os mesmos elementos, mas usando a interpretação de $\mathfrak{N}$ para a operação.
$$\begin{aligned}&\text{para toda operação op na assinatura e todos } x, y, \ldots, z \text{ em } \mathfrak{M}\text{:}\\ &\qquad\qquad \mathrm{op}_{\mathfrak{M}}(x, y, \ldots, z) = \mathrm{op}_{\mathfrak{N}}(x, y, \ldots, z)\end{aligned}$$

- para cada relação na assinatura, e para quaisquer elementos de $\mathfrak{M}$, se esses elementos estão relacionados de acordo com a interpretação de $\mathfrak{M}$ para a relação, então o mesmo vale se usarmos a interpretação de $\mathfrak{N}$ para a relação.
$$\begin{aligned}&\text{para toda relação R na assinatura:}\\ &\qquad \text{se } x, y, \ldots, z \text{ estão relacionados de acordo com } \mathrm{R}_{\mathfrak{M}}\\ &\qquad\qquad \text{então } x, y, \ldots, z \text{ estão relacionados de acordo com } \mathrm{R}_{\mathfrak{N}}\end{aligned}$$

- para cada constante na assinatura, as interpretações de $\mathfrak{M}$ e de $\mathfrak{N}$ para a constante coincidem.

$$\text{para toda constante } c \text{ na assinatura:} \qquad c_{\mathfrak{M}} = c_{\mathfrak{N}}$$

Por exemplo, um monoide $(M, *, e)$ é uma subestrutura (nesse caso, um "submonoide") de um outro monoide $(N, \#, f)$ quando:

- cada elemento de M é também um elemento de N
- para todos $x, y \in M$, temos $x * y \;\; = \;\; x \# y$
- temos $e = f$.

Assim o monoide $(\mathbb{N}, \times, 1)$ é um submonoide de $(\mathbb{R}, \times, 1)$, mas não é um submonoide de $(\mathbb{N}, +, 0)$.

* **a.** Dados conjuntos X e Y, se $X \subseteq Y$ então chamamos de *inclusão* a função inc :: $X \to Y$ definida por $\mathrm{inc}(x) := x$ para todo $x \in X$.

Assim, a única diferença entre inclusão e (função) identidade é que na identidade o domínio e contradomínio devem ser os mesmos, mas isso não precisa ser verdade para a inclusão.

Prove que uma estrutura é subestrutura de outra sse[2] o mapa formado por inclusões para todos os universos da assinatura é um homomorfismo entre as estruturas.

b. Dê a definição "por extenso" da noção de quando uma categoria é subestrutura de outra.

* **c** **("Subcategoria plena").** Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \,;\,)$ uma categoria, e seja X um subconjunto qualquer de $\mathcal{O}$. Seja Y o conjunto das setas de $\mathcal{C}$ entre elementos de X, i.e., setas $f \in \mathcal{A}$ tais que $\mathrm{dom}(f) \in X \ni \mathrm{cod}(f)$.

Prove que $(X, Y, \mathrm{dom}', \mathrm{cod}', \mathrm{id}', ;')$ é uma subcategoria (ou seja, é uma categoria e também é uma subestrutura de $\mathcal{C}$) de $\mathcal{C}$, onde as definições de dom', cod', id' e $;'$ são "herdadas" diretamente de dom, cod, id e $;$ (i.e., são calculadas exatamente da mesma forma).

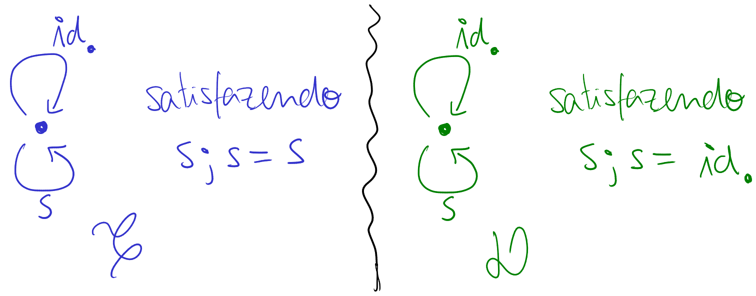
* **d.** Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \,;\,)$ uma categoria, e sejam X um subconjunto qualquer de $\mathcal{O}$ e Y um subconjunto qualquer de $\mathcal{A}$.

Considere dom', cod', id' e $;'$ "herdadas" diretamente de dom, cod, id e $;$ como explicado no item anterior.

Quais propriedades ainda devem ser exigidas para que $(X, Y, \mathrm{dom}', \mathrm{cod}', \mathrm{id}', ;')$ seja uma subcategoria de $\mathcal{C}$?

Questão 9. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ as categorias da figura abaixo:

[2] "se, e somente se"



Note que a única diferença entre as categorias é na definição de composta.

a. Quantos funtores há de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$?

b. Dê uma explicação "intuitiva" (informal, porém clara) do que devem ser funtores de $\mathcal{C}$ para Set e de $\mathcal{D}$ para Set.

c. Dê dois exemplos diferentes de funtores de $\mathcal{C}$ para Set

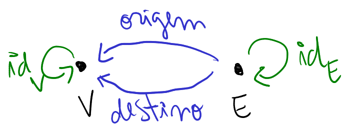
d. Dê dois exemplos diferentes de funtores de $\mathcal{D}$ para Set

Questão 10. Prove ou refute:

a. De qualquer categoria para qualquer categoria sempre existe pelo menos um funtor.

b. Dadas quaisquer categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, se $\mathcal{D}$ tem pelo menos um objeto então existe pelo menos um funtor de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$.

***Questão 11.** Considere a categoria abaixo, que chamaremos de $\mathcal{G}$:



Dê uma descrição intuitiva (informal, porém clara) do que são os funtores de $\mathcal{G}$ para Set, e dê dois exemplos (distintos) desses funtores.