INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Matemática Discreta 2024.1

Prova 1

6 de junho de 2024

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1 (2,5 pontos)**.** Após vários testes, os funcionários de uma pista de kart determinaram que, dentre os n karts à disposição para corridas,

- b karts têm desempenho "bom" equivalente, recebendo nota 9;
- m têm desempenho pior que os acima, mas "médio" e equivalentes entre si, recebendo nota 7;
- r têm desempenho "ruim", pior que todos os outros mas equivalentes entre si, recebendo nota 5.

Não há outros karts, i.e., temos $n = b + m + r$. Um grupo de $k > n$ amigos chega para fazer uma corrida nessa pista. Sabendo que as únicas preferências que eles têm é que cada um gostaria de usar o melhor kart possível e ninguém quer ficar de fora, de quantas maneiras eles podem se organizar para correr?

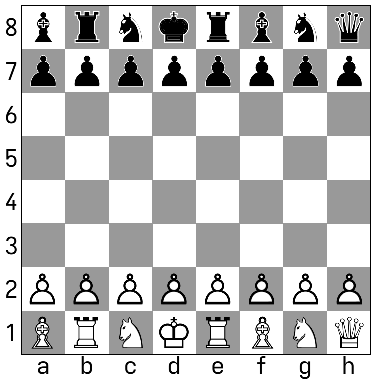
Questão 2 (2,5 pontos)**.** O estadunidense *Bobby Fischer* foi um jogador de xadrez multicampeão do mundo na década de 1970. Frustrado com os rumos que o esporte estava tomando já naquela época, com jogadores memorizando longas sequências de jogadas a partir da abertura, ele criou uma nova versão do jogo, hoje conhecida como *Fischer960* para impossibilitar essa estratégia. A única diferença[1] é na disposição das peças no começo do jogo, que é feita de forma **aleatória** mas com as seguintes restrições:

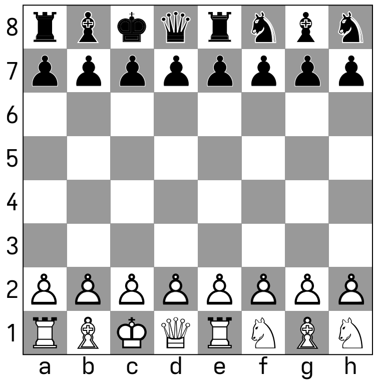
- os peões são dispostos como no xadrez usual;
- para cada jogador, os bispos devem ocupar uma casa branca e uma casa preta;
- para cada jogador, o rei deve ficar entre as duas torres;

[1]exceto por particularidades da jogada especial *roque* ("*castle*") que não são relevantes pra essa questão.

- as peças brancas e pretas de mesmo tipo devem estar nas mesmas colunas (denotadas por letras nas figuras abaixo): por exemplo, se há um bispo na casa `b1`, então tem que haver um bispo na casa `b8`, se há uma torre na casa `e1` então tem que haver uma torre na casa `e8`, etc.

Veja exemplos de arrumações válidas para esse jogo:





Prove que há 960 possíveis arrumações válidas para iniciar um jogo de xadrez Fischer960.

Questão 3.

a (1,5 pontos)**.** Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$ e tais que $x + 1 = k \cdot y$. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$y^n = \frac{1}{k^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

b (1,5 pontos)**.** Determine todos os números primos que dividem

$$\frac{1}{6^{123456789}} \cdot \sum_{i=0}^{123456789} \binom{123456789}{i} 41^i$$

Questão 4 (3 pontos)**.** Considere os conjuntos $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $Y = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Quantas funções **sobrejetivas** existem com domínio X e imagem Y?

Dica: Para cada $i \in Y$, seja A_i o conjunto de funções com domínio X e contradomínio Y que *não têm* i em suas imagens. Determinar o tamanho da união

$$\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$$

pode ser uma boa ideia, pois uma função sobrejetiva é uma função que *não deixa de ter ninguém do contradomínio em sua imagem.*