



Matemática Discreta 2024.1

Segunda Chamada da Prova 1

18 de julho de 2024

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1.

a (1,5 pontos). Um sistema *online* exige que usuários tenham senha de comprimento exatamente 10.

Os caracteres aceitos são:

- letras (maiúsculas ou minúsculas), exceto a letra O maiúscula
- dígitos de 1 a 9
- símbolos @ # \$ % & * - + ? !

Adicionalmente, para ser aceita, a senha tem que ter **pelo menos** um símbolo.

Determine quantas são as senhas possíveis, i.e., aceitas por esse sistema.

Se quiser, você pode deixar a sua resposta expressa como uma conta usando as operações básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão, exponenciação), sem precisar efetuar a conta em si. Use a “tabuada” abaixo caso seja útil:

$$6^2 = 36$$

$$6^3 = 216$$

$$6^4 = 1.296$$

$$6^5 = 7.776$$

$$6^6 = 46.656$$

$$6^7 = 279.936$$

$$6^8 = 1.679.616$$

$$6^9 = 10.077.696$$

$$6^{10} = 60.466.176$$

$$7^2 = 49$$

$$7^3 = 343$$

$$7^4 = 2.401$$

$$7^5 = 16.807$$

$$7^6 = 117.649$$

$$7^7 = 823.543$$

$$7^8 = 5.764.801$$

$$7^9 = 40.353.607$$

$$7^{10} = 282.475.249$$

b (1,5 pontos). Suponha que você tenha em mãos uma lista de 1000 palavras comuns da língua portuguesa, sendo que nenhuma tem ocorrência de cedilha,

acento ou til, i.e., todas usam as 26 letras “simples” do alfabeto. Suponha adicionalmente que todas usam apenas letras minúsculas.

Você pode usar essa lista para fazer senhas (não no sistema do item acima, por causa das regras...), simplesmente concatenando palavras da lista. Vamos chamar uma senha desse tipo de *frase-senha*.

A ideia é que frases-senha sejam mais fáceis de memorizar do que senhas respeitando as regras esdrúxulas acima, mas será que elas são seguras?

Encontre o menor $n \in \mathbb{N}$ para o qual a quantidade de frases-senha usando n palavras da lista é estritamente maior que a quantidade possível de senhas do sistema online descrito acima.

Questão 2 (2,5 pontos). Sejam $n, k \geq 2$ com $k \leq n$. Dê duas provas diferentes para a igualdade abaixo, mas *sem usar a fórmula* $\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!}$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$$

Questão 3 (3 pontos). Em um torneio de xadrez com $n \geq 2$ jogadores, cada jogador jogou exatamente 1 vez contra cada outro jogador, e nenhum jogo terminou em empate. Prove que existe um jogador A tal que, para todo outro jogador B :

- B perdeu seu jogo contra A , ou
- B perdeu o jogo contra alguém que por sua vez perdeu seu jogo contra A .

Dica: começa com i , termina com n dução... :)

Questão 4 (2,5 pontos). Uma sala possui $2n$ cadeiras idênticas arrumadas em círculo. Entram na sala $k < n$ pessoas para se sentarem, e elas só têm uma preferência: ninguém quer se sentar diretamente ao lado de ninguém, i.e., cada pessoa quer ficar com pelo menos uma cadeira vazia de cada lado.

Determine de quantas formas isso pode ser feito.