INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Matemática Discreta 2024.1

Prova 2 (primeiro grupo)

11 de julho de 2024

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. Em um rochedo à beira-mar há um poste vertical que tem n ganchos igualmente espaçados ao longo de seu comprimento. Esse poste é utilizado para comunicação com os navios: cada sequência de n bandeiras coloridas presas nos n ganchos do poste indica uma mensagem diferente (todos os ganchos têm que ser usados para fazer uma mensagem).

Temos bandeiras de dois tipos:

- bandeiras que podem ser presas no poste usando apenas 1 gancho ("tipo 1");
- bandeiras que podem ser presas no poste usando 2 ganchos consecutivos ("tipo 2").

Considere que temos:

- bandeiras de tipo 1 de u cores diferentes;
- bandeiras de tipo 2 de d cores diferentes;
- nenhuma bandeira de tipo 1 tem a mesma cor que nenhuma bandeira de tipo 2;
- a quantidade de bandeiras de cada cor é abundante (maior do que n);

Dado n natural, seja $M(n)$ a quantidade de mensagens diferentes que podem ser passadas para os navios usando um poste com n ganchos. Por convenção, vamos estipular $M(0) = 1$ (a "mensagem vazia" é a única nesse caso).

a (1,5 pontos). Escreva uma relação de recorrência para o valor de $M(n)$ (incluindo caso(s) base).

b (2 pontos). Sendo $u = 2$, $d = 8$, encontre uma forma fechada para $M(n)$.

Questão 2 (3,5 pontos). Na última lista de exercícios, vimos que os *cografos* são os grafos construídos de acordo com a seguinte construção recursiva Constr_1:

- Caso base: o grafo com 1 vértice;
- Caso recursivo UD: a *união disjunta*[1] de quaisquer dois grafos já construídos;
- Caso recursivo J: a *junção*[2] de quaisquer dois grafos já construídos.

Prove que os cografos também são exatamente os grafos que podem ser obtidos usando a seguinte construção recursiva Constr_2:

- Caso base: o grafo com 1 vértice;
- Caso recursivo UD: a *união disjunta* de quaisquer dois grafos já construídos;
- Caso recursivo C: o *complemento*[3] de qualquer grafo já construído.

Questão 3. Seja G um grafo conexo.

- uma *ponte* em G é uma aresta que, quando retirada, desconecta o grafo;
- uma *articulação* em G é um vértice que, quando retirado[4], desconecta o grafo.

a (1 ponto). Prove que todo grafo conexo que tem ponte tem também uma articulação, mas que a recíproca não é sempre verdadeira.

b (1 ponto). Prove que qualquer vértice em uma árvore é articulação ou é folha (i.e., tem grau 1), e nunca ambos.

c (2 pontos). Prove que não é possível, em um grafo conexo, termos que todos os vértices são articulações.

[1] A união disjunta de G e H é o grafo que tem como vértices a união dos vértices de G e de H após estes serem renomeados para evitar qualquer conflito, e cujas arestas são apenas aquelas que já existiam em G ou em H.

[2] A *junção* de G e H é o grafo obtido a partir da união disjunta de G e H pela adição de todas as arestas entre os vértices de G e os de H.

[3] O *complemento* de um grafo G é um grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G, e que tem como arestas exatamente as arestas que G *não tem*.

[4] As arestas conectadas ao vértice retirado também são retiradas!