INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Matemática Discreta 2024.1

Prova 2 (segundo grupo)

16 de julho de 2024

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. O chefe final de um jogo tem $n \geqslant 1$ unidades de energia ("HP"), e o jogador tem dois tipos de golpes:

- s golpes "simples" que tiram 1 HP cada (mas são fáceis de executar);
- para cada $k \geqslant 2$, o jogador tem e golpes "especiais", que tiram k HP cada (mas são mais difíceis de executar).

Esse jogo tem uma crueldade adicional: se em algum momento o jogador acerta um golpe que tira *mais* HP do que o chefe tinha naquele momento, então o jogador morre junto!

Dado $n \geqslant 1$, seja $G(n)$ a quantidade de sequências de golpes tais que, se o jogador acerta os golpes naquela sequência, ele mata o chefe e não morre junto.

a (2 pontos)**.** Escreva uma relação de recorrência para $G(n)$, incluindo caso(s) base.

b (2 pontos)**.** Sendo $s = 2$, $e = 4$, encontre uma forma fechada para $G(n)$.

Questão 2. Uma *coloração de arestas* em um grafo é uma atribuição de cores às suas arestas de maneira que arestas que compartilhem um vértice recebam cores distintas.

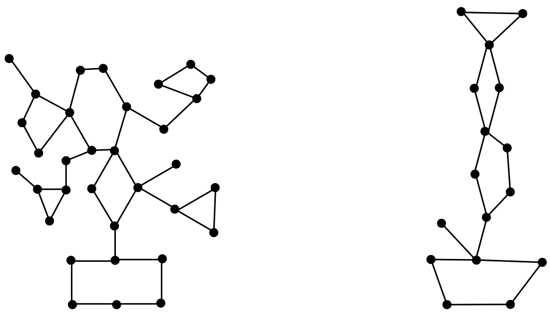
a (1,25 pontos)**.** Prove que se G tem vértice com grau d, então pelo menos d cores são necessárias para colorir suas arestas.

b (1,25 pontos)**.** Dado um grafo G, seja $\Delta(G)$ o maior grau dentre todos os vértices de G.

Mostre que existem grafos G e H conexos, ambos com pelo menos 4 vértices, tais que:

- G pode ter suas arestas coloridas com apenas $\Delta(G)$ cores;
- H **não** pode ter suas arestas coloridas com apenas $\Delta(H)$ cores. Quantas cores são necessárias e suficientes no seu exemplo?

Questão 3. Dizemos que um grafo conexo G é um *cacto* se cada uma de suas arestas faz parte de no máximo 1 ciclo.



a (2 pontos)**.** Prove que um grafo conexo G é um cacto se, e somente se, quaisquer dois ciclos distintos em G têm no máximo 1 vértice em comum.

b (2,5 pontos)**.** Considere a seguinte construção recursiva de grafos, Cact:

- Caso base: construa o grafo com 1 vértice. Declaramos que esse vértice não tem *amigos* nesse grafo.
- Caso recursivo 1: se G é um grafo já construído, adicione um vértice novo v e uma aresta de v a qualquer vértice u de G. Declaramos que no novo grafo os *amigos* de v são os amigos de u mais o próprio u, e que as amizades envolvendo os outros vértices de G não são alteradas.
- Caso recursivo 2: se G é um grafo já construído, adicione um vértice novo v e arestas de v a dois vértices u_0 e u_1 de G, desde que u_0 e u_1 sejam amigos. Declaramos que *não são amigos entre si* no novo grafo os vértices v, u_0, u_1 e os vértices de G que façam parte de caminhos entre u_0 e u_1. As amizades envolvendo os outros vértices de G não são alteradas.

Prove que todo grafo construído por Cact é um cacto.