

# Lógica e Computabilidade 2024.1

Hugo Nobrega

## Lista de Exercícios 2

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!

Entregue todas as questões marcadas com \* até

**20 de maio às 20:00**

**Questão 1.** Considere a seguinte definição.

**Definição 1.** Dadas fórmulas  $\varphi, \psi$  e uma fórmula atômica  $p$ , denotamos por

$\varphi \left[ \frac{\psi}{p} \right]$  o resultado de *substituir* cada ocorrência de  $p$  em  $\varphi$  por  $\psi$ .

Por exemplo, para  $\varphi = ((\neg(p \rightarrow q)) \wedge (\neg p))$  e  $\psi = (r \rightarrow p)$ , temos

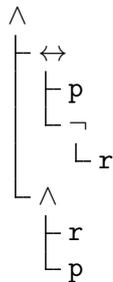
$$\varphi \left[ \frac{\psi}{p} \right] = ((\neg((r \rightarrow p) \rightarrow q)) \wedge (\neg(r \rightarrow p)))$$

**a.** Dê uma definição recursiva para esse conceito. *Dica:* Considere  $\psi$  uma fórmula qualquer (fixa) e faça a recursão em  $\varphi$ .

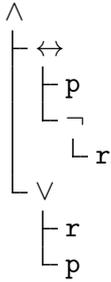
**b.** Prove que, se  $\varphi$  é uma fórmula válida, então  $\varphi \left[ \frac{\psi}{p} \right]$  também é válida para qualquer fórmula  $\psi$  e qualquer fórmula atômica  $p$ .

**Questão 2.** Classifique cada uma das fórmulas abaixo em *válida*, *contradição* ou *contingência*. Justifique cada resposta.

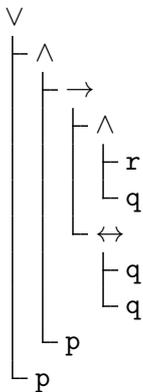
**a.**  $(p \leftrightarrow [\neg r]) \wedge (r \wedge p)$



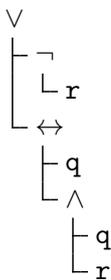
**b.**  $(p \leftrightarrow [\neg r]) \wedge (r \vee p)$



**c.**  $([\{r \wedge q\} \rightarrow \{q \leftrightarrow q\}] \wedge p) \vee p$



**d.**  $(\neg r) \vee (q \leftrightarrow [q \wedge r])$



**Questão 3.** A seguinte definição será usada em alguns dos itens abaixo.

**Definição 2.** Um *literal* é um símbolo proposicional, ou a negação de um símbolo proposicional (i.e., uma fórmula  $(\neg p)$  onde  $p$  é um símbolo proposicional).

Em notação Backus–Naur:

$$\langle \text{literal} \rangle := \langle \text{símbolo proposicional} \rangle \mid (\neg \langle \text{símbolo proposicional} \rangle)$$

\* **a.** Considere os seguintes conjuntos de fórmulas, definidos por recursão:

**Definição 3** (Forma normal conjuntiva (FNC) (ou CNF, do inglês)).

- Uma *cláusula para FNC* é um literal, ou a disjunção entre um literal e uma cláusula para FNC.

- Uma *fórmula em FNC* é uma cláusula para FNC, ou a conjunção entre uma cláusula para FNC e uma fórmula em FNC.

Em notação Backus–Naur:

$$\begin{aligned} \langle \text{cláusula para FNC} \rangle &:= \langle \text{literal} \rangle \mid (\langle \text{literal} \rangle \vee \langle \text{cláusula para FNC} \rangle) \\ \langle \text{fórmula em FNC} \rangle &:= \langle \text{cláusula para FNC} \rangle \\ &\quad \mid ((\langle \text{cláusula para FNC} \rangle \wedge \langle \text{fórmula em FNC} \rangle)) \end{aligned}$$

A forma normal conjuntiva também é conhecida como *forma normal clausal*.

Prove que toda fórmula da LC é semanticamente equivalente a alguma fórmula em FNC.

**b.** Faça (em pseudocódigo ou em sua linguagem favorita) um programa de computador que converta uma fórmula qualquer da LC para uma equivalente em FNC.

**c.** Considere os seguintes conjuntos de fórmulas, definidos por recursão:

**Definição 4** (Forma normal disjuntiva (FND) (ou DNF, do inglês)).

- Uma *cláusula para FND* é um literal, ou a conjunção entre um literal e uma cláusula para FND.
- Uma *fórmula em FND* é uma cláusula para FND, ou a disjunção entre uma cláusula para FND e uma fórmula em FND.

Em notação Backus–Naur:

$$\begin{aligned} \langle \text{cláusula para FND} \rangle &:= \langle \text{literal} \rangle \mid (\langle \text{literal} \rangle \wedge \langle \text{cláusula para FND} \rangle) \\ \langle \text{fórmula em FND} \rangle &:= \langle \text{cláusula para FND} \rangle \\ &\quad \mid ((\langle \text{cláusula para FND} \rangle \vee \langle \text{fórmula em FND} \rangle)) \end{aligned}$$

Prove que toda fórmula da LC é semanticamente equivalente a alguma fórmula em FND.

**d.** Faça (em pseudocódigo ou em sua linguagem favorita) um programa de computador que converta uma fórmula qualquer da LC para uma equivalente em FND.

**e.** Para essa questão, primeiramente vamos. . .

- expandir o alfabeto da lógica proposicional LC, adicionando um novo símbolo:  $\perp$  (usualmente chamado “falso” ou “bottom”)
- expandir a definição das fórmulas, permitindo um caso base adicional: “ $\perp$  é uma fórmula”

- expandir a definição de semântica das fórmulas, com um caso base adicional: “o valor-verdade de  $\perp$  é sempre  $F$ .”

Agora considere a seguinte definição:

**Definição 5** (Forma normal implicativa (FNI) (ou INF, do inglês)).

- Uma *fórmula em FNI* é um símbolo proposicional, ou uma fórmula do tipo  $(\varphi \rightarrow \perp)$ , onde  $\varphi$  é uma fórmula em FNI, ou uma fórmula do tipo  $(\varphi \rightarrow \psi)$ , onde  $\varphi, \psi$  são fórmulas em FNI.

Em notação Backus–Naur:

$$\begin{aligned} \langle \text{fórmula em FNI} \rangle &:= \langle \text{símbolo proposicional} \rangle \\ &\quad | \langle (\text{fórmula em FNI} \rightarrow \perp) \rangle \\ &\quad | \langle (\text{fórmula em FNI} \rightarrow \langle \text{fórmula em FNI} \rangle) \rangle \end{aligned}$$

Prove que toda fórmula da LC é semanticamente equivalente a alguma fórmula em FNI.

**f.** Faça (em pseudocódigo ou em sua linguagem favorita) um programa de computador que converta uma fórmula qualquer da LC para uma equivalente em FNI.

**g** (Desafio!). Para essa questão, primeiramente vamos...

- expandir o alfabeto da lógica proposicional LC, adicionando um novo símbolo:  $\perp$  (usualmente chamado “falso” ou “bottom”)
- expandir a definição das fórmulas, permitindo um caso base adicional: “ $\perp$  é uma fórmula”
- expandir a definição de semântica das fórmulas, com um caso base adicional: “o valor-verdade de  $\perp$  é sempre  $F$ .”

Agora considere a seguinte definição:

**Definição 6** (Forma normal implicativa (FNI2) (ou INF2, do inglês)).

- Um *literal para FNI2* é um símbolo proposicional ou uma fórmula do tipo  $(p \rightarrow \perp)$ , onde  $p$  é um símbolo proposicional.

Em notação Backus–Naur:

$$\begin{aligned} \langle \text{literal para FNI2} \rangle &:= \langle \text{símbolo proposicional} \rangle \\ &\quad | \langle (\text{símbolo proposicional} \rightarrow \perp) \rangle \end{aligned}$$

- Uma *cláusula para FNI2* é uma fórmula do tipo  $(\ell \rightarrow \perp)$  onde  $\ell$  é um literal para FNI2, ou uma fórmula do tipo  $(\ell \rightarrow C)$  onde  $\ell$  é um literal para FNI2 e  $C$  é uma cláusula para FNI2.

Em notação Backus–Naur:

$$\langle \text{cláusula para FNI2} \rangle := (\langle \text{literal para FNI2} \rangle \rightarrow \perp) \\ | (\langle \text{literal para FNI2} \rangle \rightarrow \langle \text{cláusula para FNI2} \rangle)$$

- Uma *fórmula em FNI2* é uma fórmula do tipo  $(C \rightarrow \perp)$  onde  $C$  é uma cláusula para FNI2, ou uma fórmula do tipo  $(C \rightarrow \varphi)$  onde  $C$  é uma cláusula para FNI2 e  $\varphi$  é uma fórmula em FNI2.

Em notação Backus–Naur:

$$\langle \text{fórmula em FNI2} \rangle := (\langle \text{cláusula para FNI2} \rangle \rightarrow \perp) \\ | (\langle \text{cláusula para FNI2} \rangle \rightarrow \langle \text{fórmula em FNI2} \rangle)$$

Prove que toda fórmula da LC é semanticamente equivalente a alguma fórmula em FNI2.

**Questão 4.** Mostre que os seguintes conjuntos de conectivos são completos:

- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- \*  $\{\neg, \rightarrow\}$
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$
- $\{\rightarrow, \perp\}$ , com  $\perp$  conforme descrito na Questão 3(e) acima (note que  $\perp$  deve ser visto como um conectivo “nulário” ou “0-ário”, i.e., um conectivo que se aplica a zero outras fórmulas, e **não** como um símbolo proposicional).
- $\{\text{NAND}\}$ , sendo NAND o conectivo binário “não ambos”, i.e., com a semântica dada pela tabela abaixo:

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi \text{ NAND } \psi)$ |
|-----------|--------|--------------------------------|
| V         | V      | F                              |
| V         | F      | V                              |
| F         | V      | V                              |
| F         | F      | V                              |

Por motivos históricos, o conectivo NAND também é conhecido como “Sheffer stroke”.

\* **g.**  $\{\text{NOR}\}$ , sendo NOR o conectivo binário “nenhum dos dois”, i.e., com a semântica dada pela tabela abaixo:

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi \text{ NOR } \psi)$ |
|-----------|--------|-------------------------------|
| V         | V      | F                             |
| V         | F      | F                             |
| F         | V      | F                             |
| F         | F      | V                             |

**h.**  $\{\perp, \top, \text{IF-THEN-ELSE}\}$ , onde  $\perp$  é o “conectivo 0-ário” sempre falso (“bottom”),  $\top$  é o “conectivo 0-ário” sempre verdadeiro (“top”), e IF-THEN-ELSE é o conectivo “condicional ternário”, presente em algumas linguagens de programação, cuja semântica é dada pela tabela abaixo.

| $\varphi$ | $\psi$ | $\beta$ | $(\text{IF } \varphi \text{ THEN } \psi \text{ ELSE } \beta)$ |
|-----------|--------|---------|---|
| V         | V      | V       | V   |
| V         | V      | F       | V   |
| V         | F      | V       | F   |
| V         | F      | F       | F   |
| F         | V      | V       | V   |
| F         | V      | F       | F   |
| F         | F      | V       | V   |
| F         | F      | F       | F   |

Em outras palavras: se  $\varphi$  é verdadeiro, copie  $\psi$ ; senão, copie  $\beta$ .

**Questão 5.** Seja  $X$  o conjunto das fórmulas construídas apenas usando os conectivos  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  (além dos símbolos proposicional usuais).

- Escreva a definição recursiva de  $X$ .
- Prove o seguinte teorema:

**Teorema.** *Seja  $\varphi \in X$  e sejam  $p_0, p_1, \dots, p_n$  as subfórmulas atômicas de  $\varphi$ . Então em qualquer contexto no qual  $p_0, p_1, \dots, p_n$  são todos verdadeiros, temos que  $\varphi$  também é verdadeiro.*

*Em outras palavras, temos*

$$p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n \models \varphi$$

- Prove que o conjunto  $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  de conectivos não é completo.

**Questão 6.** Seja  $\varphi$  uma fórmula do conjunto  $X$  da Questão 5 i.e., uma fórmula construída usando apenas símbolos proposicionais e os conectivos  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ . Prove que para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se  $\varphi$  tem  $k$  ocorrências de símbolos proposicionais (contando todas as repetições), então o comprimento de  $\varphi$  (considerando  $\varphi$  como uma palavra em um alfabeto, i.e., contando todas as ocorrências de todos os símbolos em  $\varphi$ , incluindo parênteses, etc) é  $4k - 3$ .

**Questão 7.** Considere a seguinte sequência infinita de fórmulas definidas por recursão (aqui o parâmetro  $n$  é sempre natural):

$$\varphi_n = \begin{cases} (p \rightarrow q), & \text{se } n = 0 \\ (\varphi_{n-1} \rightarrow p), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Para quais valores de  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $\varphi_n$  é uma tautologia (i.e., uma fórmula válida)? Justifique sua resposta.

**Questão 8.** Nesta questão você não pode usar os teoremas de corretude e completude vistos em sala.

Sejam  $\Sigma, \Delta$  conjuntos de fórmulas da LC e sejam  $\varphi, \psi$  fórmulas da LC. Prove cada um dos itens abaixo.

- a. Se  $\varphi \in \Sigma$ , então  $\Sigma \vdash \varphi$ .
- b. Se  $\varphi : \star$  e  $\varphi : \bar{\star}$  ambos estão em  $\Sigma$  para algum  $\varphi$ , então  $\Sigma \vdash \psi$  para qualquer  $\psi$ .
- c. Se  $\Sigma \vdash \varphi$ , então também  $\Sigma \cup \Delta \vdash \varphi$ .
- \* d.  $\Sigma, \varphi \vdash \psi$  se, e somente se,  $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

**Questão 9.** Prove os itens abaixo usando árvores de avaliação.

- a.  $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash r$
- \* b.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
- c.  $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \not\vdash [p \wedge (q \wedge r)] \vee [(\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge (\neg r))]$
- \* d.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow r$

**Questão 10.** Como vimos, além de  $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  há outros conjuntos de conectivos completos para a LC. Em cada item abaixo, dê regras de manipulação de árvores de avaliação que correspondam aos conectivos listados e que sejam corretas, i.e., que preservem satisfabilidade das árvores.

- a. {NAND}
- \* b. {NOR}
- c.  $\{\perp, \top, \text{IF-THEN-ELSE}\}$

**Questão 11.** Nesta questão vamos provar a completude do nosso sistema de provas para a LC, i.e., vamos provar que para qualquer conjunto  $\Sigma$  de fórmulas da LC e qualquer fórmula  $\varphi$  da LC temos

$$\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi.$$

Na verdade, provaremos a contrapositiva dessa implicação.

**Definição.** Seja  $A$  uma árvore de avaliação e seja  $r$  um ramo de  $A$ . Dizemos que  $r$  é *saturado* se, para qualquer julgamento composto  $\varphi : \star$  que ocorra como rótulo de um nó de  $r$ , temos algum dos casos abaixo:

Caso  $\neg$ : Se  $\varphi = (\neg\psi)$ , então em  $r$  há algum nó com rótulo  $\psi : \bar{\star}$ .

Caso  $\wedge : V$ : Se  $\varphi = (\psi \wedge \beta)$  e  $\star = V$ , então em  $r$  há nós com rótulos  $\psi : V$  e  $\beta : V$ .

Caso  $\wedge : F$ : Se  $\varphi = (\psi \wedge \beta)$  e  $\star = F$ , então em  $r$  há algum nó com rótulo  $\psi : F$  ou algum nó com rótulo  $\beta : F$ .

Caso  $\vee : V$ : Se  $\varphi = (\psi \vee \beta)$  e  $\star = V$ , então em  $r$  há algum nó com rótulo  $\psi : V$  ou algum nó com rótulo  $\beta : V$ .

Caso  $\vee : F$ : Se  $\varphi = (\psi \vee \beta)$  e  $\star = F$ , então em  $r$  há nós com rótulos  $\psi : F$  e  $\beta : F$ .

Caso  $\rightarrow : V$ : Se  $\varphi = (\psi \rightarrow \beta)$  e  $\star = V$ , então em  $r$  há algum nó com rótulo  $\psi : F$  ou algum nó com rótulo  $\beta : V$ .

Caso  $\rightarrow : F$ : Se  $\varphi = (\psi \rightarrow \beta)$  e  $\star = F$ , então em  $r$  há nós com rótulos  $\psi : V$  e  $\beta : F$ .

Caso  $\leftrightarrow : V$ : Se  $\varphi = (\psi \leftrightarrow \beta)$  e  $\star = V$ , então em  $r$  há nós com rótulos  $\psi : V$  e  $\beta : V$ , ou nós com rótulos  $\psi : F$  e  $\beta : F$ .

Caso  $\leftrightarrow : F$ : Se  $\varphi = (\psi \leftrightarrow \beta)$  e  $\star = F$ , então em  $r$  há nós com rótulos  $\psi : V$  e  $\beta : F$ , ou nós com rótulos  $\psi : F$  e  $\beta : V$ .

\* **a.** Seja  $r$  um ramo aberto e saturado de uma árvore de avaliação  $A$ . Seja  $c_r$  o contexto definido por:

$$c_r(p) = \begin{cases} V, & \text{se } p : V \text{ é o rótulo de algum nó de } r \\ F, & \text{se } p : F \text{ é o rótulo de algum nó de } r. \end{cases}$$

Mostre que este contexto satisfaz  $r$  (i.e., satisfaz todos os julgamentos que aparecem como rótulos dos nós em  $r$ ). (*Dica:* em “quem” você pode fazer indução?)

**b.** Por que precisamos exigir que o ramo  $r$  seja aberto e saturado, no item anterior?

\* **c.** Prove o teorema da completude: se  $\Sigma \not\vdash \varphi$  (i.e., nenhuma árvore de avaliação para  $\Gamma = \{\sigma : V ; \sigma \in \Sigma\} \cup \{\varphi : F\}$  é fechada), então  $\Sigma \not\models \varphi$  (i.e., algum contexto torna todas as fórmulas em  $\Sigma$  verdadeiras mas  $\varphi$  falsa). Para simplificar, você pode assumir que  $\Sigma$  é finito.