Lógica e Computabilidade 2024.1

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!
Entregue todas as questões marcadas com * até
5 de julho às 20:00,

Lista atualizada em 4 de julho.

Questão 1. Considere uma assinatura com dois símbolos para relações: P (unário) e R (binário). Prove ou refute o que é afirmado em cada item abaixo. Lembrete: nossos modelos sempre têm universos não vazios.

a. $P(x) \vDash P(x)$

b. $P(x) \vDash P(y)$

c. $P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

d. $\forall x\, P(x) \vDash P(x)$

e. $\forall x\, P(x) \vDash \exists x\, P(x)$

f. $\exists x\, P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

g. $\forall x\, \exists y\, (xRy) \vDash \exists x\, \forall y\, (xRy)$

h. $\exists x\, \forall y\, (xRy) \vDash \forall x\, \exists y\, (xRy)$

*** i.** $\vDash \exists x\, (P(x) \to \forall y\, (P(y)))$

j. $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

*** k.** Se x não ocorre livre em φ, então $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

*** l.** $\vDash \varphi$ se, e somente se, $\vDash \forall x\, \varphi$

Questão 2. Chamamos de *modelagem* o processo de formalizar (simbolizar) frases ou argumentos da linguagem natural para a LPO usando alguma assinatura apropriada. Deve-se indicar a correspondência entre os componentes da frase de linguagem natural e os símbolos da linguagem formal.

Por exemplo, para a frase “eu nunca como manga e bebo leite no mesmo dia”, poderíamos ter:

Natural	Simbólico
eu como manga no dia x	$M(x)$
eu bebo leite no dia x	$L(x)$

também estipulando que as variáveis $x, y, z, \ldots$ correspondem a dias.

De acordo com essa correspondência, a frase dada cima pode ser modelada por

$$\forall x \, \neg(M(x) \wedge L(x)).$$

Cada frase pode ser modelada de diversas formas diferentes.

Dê modelagens para cada frase abaixo.

a. "Ninguém gosta de todo mundo."

b. "Toda pessoa que tem um filho deveria ser carinhosa com ele."

c. "Você consegue enganar algumas pessoas em alguns momentos, mas não consegue enganar todas as pessoas em todos os momentos."

d. "Nem toda fruta é gostosa, algumas são, mas nenhuma fruta cítrica é."

Questão 3.

Definição. Seja $\mathcal{E}$ uma estrutura para uma certa assinatura $\mathcal{A}$.

- Seja $d \in D(\mathcal{E})$. Dizemos que uma fórmula φ *define* d em $\mathcal{E}$ se:
  - φ tem exatamente uma variável livre
  - "d é único elemento de $D(\mathcal{E})$ que satisfaz φ", i.e., para todo $e \in D(\mathcal{E})$ temos
  $$\mathcal{E} \vDash \varphi[\![e]\!] \quad \text{sse} \quad e = d$$
- Seja $X \subseteq D(\mathcal{E})$. Dizemos que uma fórmula φ *define* X em $\mathcal{E}$ se:
  - φ tem exatamente uma variável livre
  - "Os elementos de X são os únicos elementos em $D(\mathcal{E})$ que satisfazem φ", i.e., para todo $d \in D(\mathcal{E})$ temos
  $$\mathcal{E} \vDash \varphi[\![d]\!] \quad \text{sse} \quad d \in X$$
- Seja R uma relação n-ária em $D(\mathcal{E})$. Dizemos que uma fórmula φ *define* R em $\mathcal{E}$ se:
  - φ tem exatamente n variáveis livres
  - "as tuplas relacionadas por R são as únicas em $D(\mathcal{E})$ que satisfazem φ", i.e., para todos $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E})$ temos
  $$\mathcal{E} \vDash \varphi[\![d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}]\!]$$
  $$\text{sse}$$
  $$(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}) \text{ estão relacionados por R.}$$

Por exemplo, considere a assinatura com igualdade, sem constantes, sem relações e com dois símbolos para funções binárias $\oplus$ e $\odot$. Seja $\mathcal{N}$ e estrutura para essa assinatura com domínio $\mathbb{N}$, onde as funções são interpretadas respectivamente como soma e produto de naturais. Então a fórmula

$$\varphi : \quad x \oplus x = x$$

define o elemento 0 em $\mathcal{N}$, pois de fato 0 é o único número natural que é o dobro de si próprio.

Dê definições em $\mathcal{N}$ para os itens listados abaixo:

* **a.** O elemento 1.

* **b.** O elemento 5.

c. O conjunto dos números pares.

* **d.** O conjunto dos números quadrados perfeitos.

e. O conjunto $\{2, 4, 5\}$.

* **f.** Para um dado natural n, o conjunto dos divisores naturais de n.

g. O conjunto dos números primos (consideramos que 0 e 1 não são primos).

h. A relação binária "é o sucessor de".

i. A relação binária "menor ou igual".

* **j.** A relação ternária "está entre", i.e., a relação que vale para uma tripla (a, b, c) sse b fica entre (ou igual) a e c na reta numérica.

k. A relação quaternária "dividendo, divisor, quociente, resto", que vale para uma tupla (a, b, c, d) sse a divisão inteira de a por b tem quociente c e resto d.

Questão 4. Em cada item abaixo, defina uma assinatura e encontre uma sentença φ dessa assinatura com a propriedade desejada. Lembre-se de que você tem liberdade de colocar os símbolos que quiser na assinatura, podendo então usar φ para fazê-los "se comportarem" de alguma forma desejada em cada modelo.

Por exemplo, para "os modelos de φ têm exatamente 1 elemento", poderíamos ter uma assinatura com igualdade e fazer φ ser $\forall x \, \forall y \, (x = y)$.

a. Para um dado $k \geqslant 1$ fixo: os modelos de φ são grafos (direcionados[1]) k-coloríveis[2].

[1] Aqui, *grafos direcionados* são compostos por um conjunto não-vazio de vértices e uma relação binária sobre eles. Permitimos laços.

[2] Um grafo direcionado é k-colorível se existe um forma de colorir seus vértices usando no máximo k cores, de forma que vértices distintos vizinhos recebam cores distintas.

* **b.** Os modelos de φ são *torneios* (grafos direcionados, sem laços, tais que entre qualquer par de vértices distintos existe exatamente uma aresta direcionada)

c. Os modelos de φ são grafos direcionados acíclicos (*DAGs*).

* **d.** Os modelos de φ são cografos (definição dada na Lista 1).

Você pode usar o seguinte teorema que nós não provamos: todo grafo que não possui P_4 como subgrafo induzido é um cografo.

Questão 5. Considere a assinatura que tem igualdade e

- funções binárias $\oplus$ e $\odot$
- uma relação binária $\lhd$
- para cada número real r, uma constante c_r

Seja $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ a estrutura para essa assinatura que tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, onde $\oplus$, $\odot$ e $\lhd$ são interpretadas respectivamente como adição, multiplicação e "estritamente menor que", e onde cada c_r é interpretada como o real r.

Finalmente, seja S o conjunto de todas as sentenças dessa assinatura que são verdadeiras na estrutura $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$. Por exemplo, as seguintes sentenças

$$\forall x\ [c_0 \neq x \ \rightarrow\ \exists y\ (x \odot y = c_1)]$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall x'\, \forall y'\ [(c_0 \lhd x \wedge x \odot y = c_1 \wedge x' \odot y' = c_1 \wedge x \lhd x') \rightarrow y' \lhd y]$$

estão em S, mas a seguinte sentença não está:

$$\exists x\, \forall y\ (y \lhd x).$$

a. Seja Σ o seguinte conjunto de fórmulas

$$\Sigma = \mathsf{S} \cup \{c_0 \lhd x\} \cup \{x \lhd c_r \mid r \in \mathbb{R} \text{ e } r > 0\}.$$

Note que algumas das fórmulas em Σ são sentenças, e outras têm a variável x livre.

Prove que não existe interpretação i para $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ tal que $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}, i$ satisfaça todas as fórmulas em Σ simultaneamente.

b. Dizemos que um conjunto Γ de fórmulas da LPO em alguma assinatura é *satisfazível* se existem uma estrutura $\mathcal{E}$ da assinatura e uma interpretação i para essa estrutura tal que $\mathcal{E}, i$ torna todas as fórmulas em Γ verdadeiras simultaneamente.

Assuma que o seguinte teorema é verdadeiro, sem precisar prová-lo:

Teorema (Teorema da Compacidade da LPO)**.** *Seja Γ um conjunto de fórmulas da LPO em alguma assinatura. Então Γ é satisfazível se, e somente se, cada subconjunto finito de Γ é satisfazível.*

Prove que Σ é satisfazível.

Questão 6. Sejam $\mathcal{A}$ uma assinatura e $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ estruturas para $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{E}_0$ é uma *subestrutura* de $\mathcal{E}_1$ se

- o domínio $D(\mathcal{E}_0)$ de $\mathcal{E}_0$ é um subconjunto do domínio $D(\mathcal{E}_1)$ de $\mathcal{E}_1$, i.e.,
$$D(\mathcal{E}_0) \subseteq D(\mathcal{E}_1)$$
- para cada símbolo para constante c de $\mathcal{A}$, temos
$$c^{\mathcal{E}_0} = c^{\mathcal{E}_1}$$
- para cada símbolo para operação n-ária op de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \ldots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E}_0)$, temos
$$\mathrm{op}^{\mathcal{E}_0}(d_0, \ldots, d_{n-1}) = \mathrm{op}^{\mathcal{E}_1}(d_0, \ldots, d_{n-1})$$
- para cada símbolo para relação n-ária R de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \ldots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E}_0)$, temos

$$R^{\mathcal{E}_0}(d_0, \ldots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{\mathcal{E}_1}(d_0, \ldots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira}$$

Suponha que $\mathcal{E}_0$ seja subsestrutura de $\mathcal{E}_1$ e seja φ uma fórmula da LPO na assinatura $\mathcal{A}$, sem ocorrências de quantificadores, e tal que $\exists x\, \varphi$ é uma sentença.

Prove que se $\mathcal{E}_0 \vDash \exists x\, \varphi$ então $\mathcal{E}_1 \vDash \exists x\, \varphi$, mas que a recíproca não é necessariamente verdadeira.