INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica e Computabilidade 2024.1

Prova 1

5 de junho de 2024

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou em listas de exercícios, devendo apenas ser quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1 (2 pontos). Mostre que o conjunto de conectivos $\{\bot, \wedge, \leftrightarrow\}$ é completo, onde $\bot$ é o "conectivo 0-ário" sempre falso ("bottom").

Questão 2. Seja $*$ um conectivo n-ário. Dizemos que $*$ é *auto-dual* se ele "satisfaz a relação de De Morgan consigo próprio", isto é, se

$$\neg(*(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) = *(\neg\varphi_0, \neg\varphi_1, \dots, \neg\varphi_{n-1})$$

(Por exemplo, a negação $\neg$ é um conectivo unário auto-dual.)

a (1,25 ponto). Prove que se $*$ é um conectivo n-ário auto-dual, e $\sharp_0, \sharp_1, \dots, \sharp_{n-1}$ são conectivos ℓ-ários auto-duais, então o conectivo ℓ-ário $\bullet$ definido por

$$\bullet(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell-1}) = *(\sharp_0(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell-1}), \sharp_1(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell-1}), \dots, \sharp_{n-1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell-1}))$$

também é auto-dual.

b (2,75 pontos). Prove que qualquer conjunto composto apenas de conectivos que são auto-duais **não** pode ser completo.

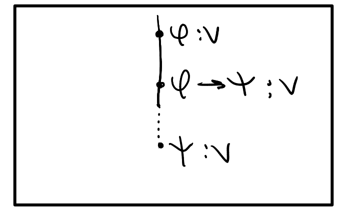
c (1,25 ponto). Mostre que o conjunto de conectivos $\{\neg, M\}$ **não é** completo, onde M é o conectivo ternário "maioria", dado pela tabela verdade abaixo:

φ	ψ	β	$M(\varphi, \psi, \beta)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Questão 3. Nesta questão vamos investigar a adição de novas regras de manipulação de árvores de avaliação.

Chamamos uma nova regra de *admissível* se a sua adição às regras que já conhecemos não permite "provar mais coisas": para todo conjunto Γ de julgamentos, se alguma árvore para Γ fecha usando as novas regras, então alguma árvore para Γ fecha apenas com as regras vistas em sala (repetidas no verso dessa folha).

a (1,25 ponto). Prove que a regra a seguir é admissível: "se um ramo aberto r tem nós N_0 com rótulo $\varphi : V$ e N_1 com rótulo $\varphi \to \psi : V$, e N_1 não está marcado, então estenda r com um nó com rótulo $\psi : V$ e marque o nó N_1."



b (1,25 ponto). Dê um outro exemplo de regra admissível (e prove que é), que não seja a regra do item acima nem nenhuma das regras do verso da folha.

c (1,25 ponto). Dê um exemplo de regra não admissível (e prove que não é).

Regras de Manipulação

ramo da árvore atual

ramo(s) expandido(s)