INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica e Computabilidade 2024.1

Prova 2

12 de julho de 2024

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou em listas de exercícios, devendo apenas ser quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

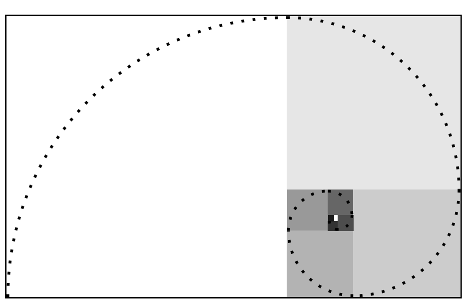
Questão 1. Como vimos na última lista de exercícios, dizemos que um elemento d em uma estrutura $\mathcal{E}$ é *definido* por uma fórmula φ se φ:

- é uma fórmula da LPO na assinatura da estrutura e
- tem apenas uma variável livre x e para qualquer atribuição a para $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}, a \vDash \varphi \quad \text{sse} \quad a(x) = d.$$

Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura com um símbolo para constante u, com dois símbolos para operações binárias $\oplus$, $\odot$ e um símbolo para relação binária $\triangleleft$. Seja $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ a estrutura para essa assinatura que tem o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ como domínio e que interpreta u como 1, as operações $\oplus$, $\odot$ respectivamente como adição e multiplicação, e a relação $\triangleleft$ como "estritamente menor que".

a (1,25 pontos). A solução positiva da equação $x^2 = x + 1$ é um número chamado *razão áurea*. Esse número é famoso pois, por exemplo, a sua n-ésima potência se aproxima do n-ésimo número de Fibonacci conforme $n \to \infty$, e também por supostamente ser "agradável" para os olhos: a razão áurea é a proporção do retângulo do qual, se retirarmos um quadrado de um dos cantos, o retângulo restante tem a mesma proporção do original.



Escreva uma fórmula da assinatura $\mathcal{A}$ que defina a razão áurea em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

b (1,25 pontos). Prove que todo número inteiro é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

Dica: não se preocupe em fazer uma definição "eficiente" ou "esperta"!

c (1,25 pontos). Um número *racional* é um número que pode ser escrito como uma fração com numerador e denominador inteiros.

Prove que todo racional é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

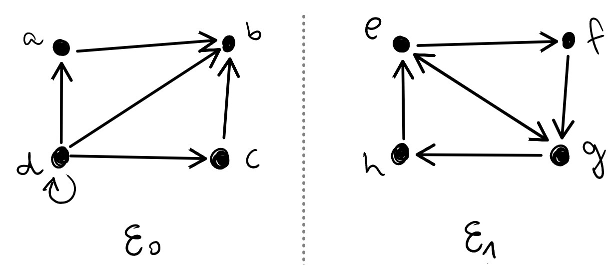
d (1,25 pontos). Prove que qualquer raiz[1] de polinômio com coeficientes racionais é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

Dica: primeiro mostre que a *maior* raiz de um dado polinômio com coeficientes racionais é definível, depois que a *segunda maior* raiz também é definível, etc.

Questão 2 (3 pontos). Prove que $\varphi, \psi \vdash \beta$, onde

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \forall x\,[(F(x) \land G(x)) \to H(x)] \quad \to \quad \exists x\,[F(x) \land (\neg G(x))]\\
\psi &:= \forall x\,[F(x) \to G(x)] \quad \lor \quad \forall x\,[F(x) \to H(x)]\\
\beta &:= \forall x\,[(F(x) \land H(x)) \to G(x)] \quad \to \quad \exists x\,[\langle F(x) \land G(x)\rangle \land \neg H(x)]
\end{aligned}$$

Questão 3. Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura com apenas um símbolo para relação binária R e considere as seguintes duas estruturas $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ para $\mathcal{A}$.



a (1,5 pontos). Para cada uma das sentenças abaixo, diga se ela é satisfeita ou não em $\mathcal{E}_0$ e $\mathcal{E}_1$, e justifique brevemente sua resposta.

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \exists x\, \forall y\, (xRx)\\
\psi &:= \forall x\, \forall y\, \exists z\, (xRz \land zRy)
\end{aligned}$$

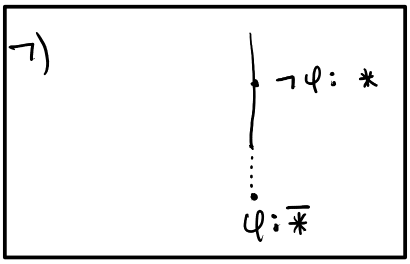
b (1,5 pontos). Escreva uma sentença que é satisfeita em $\mathcal{E}_0$ mas não em $\mathcal{E}_1$ e outra que é satisfeita em $\mathcal{E}_1$ mas não em $\mathcal{E}_0$.

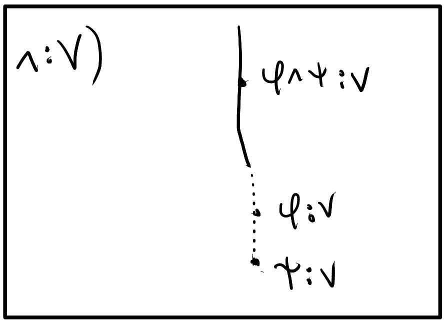
[1] *Lembrete*: uma *raiz* de um polinômio p é um número r tal que $p(r) = 0$.

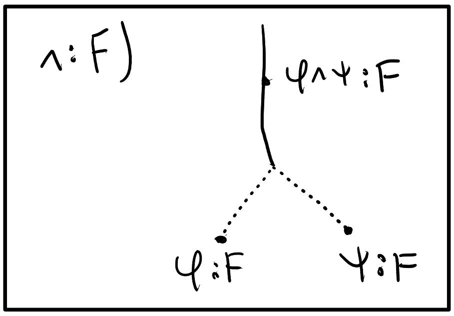
Regras de Manipulação

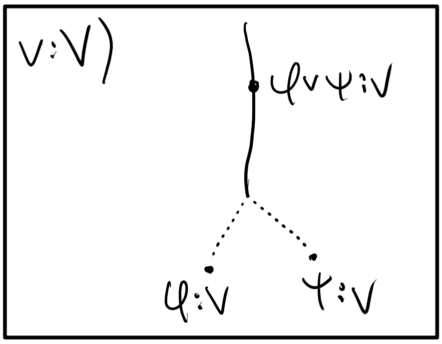
ramo da árvore atual

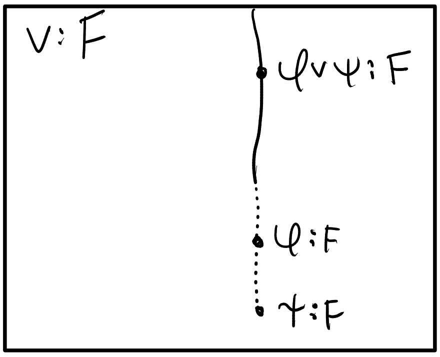
ramo(s) expandido(s)

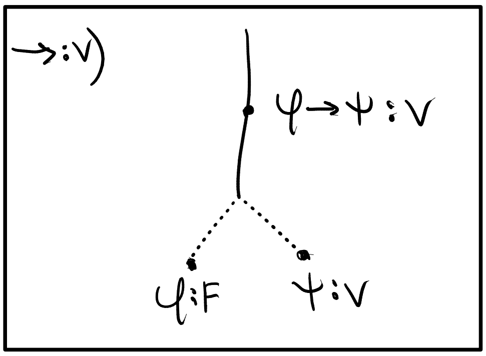


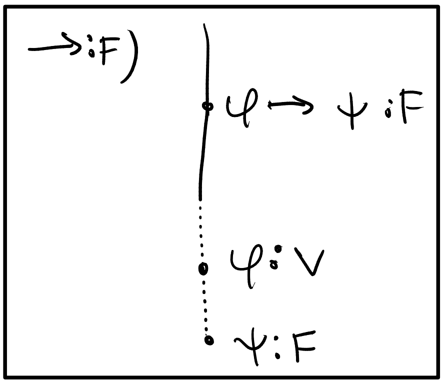


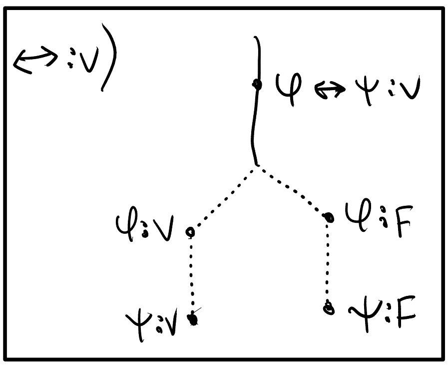


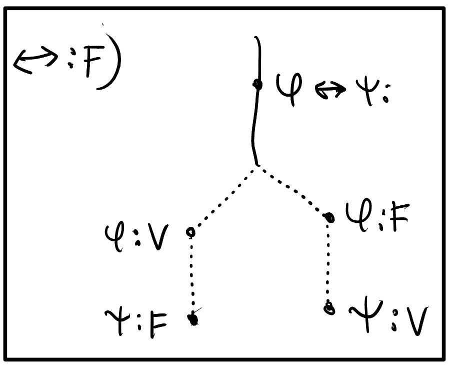


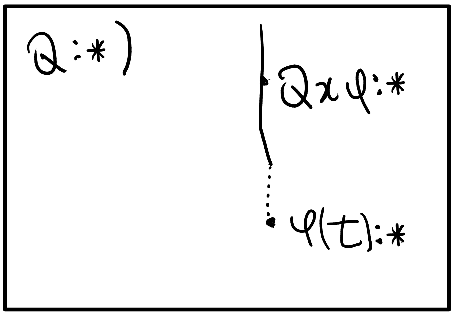












onde

- Q é ∀ ou ∃
- * é V ou F
- Nas regras ∀:V e ∃:F, t é qualquer termo fechado da assinatura expandida.
- Nas regras ∀:F e ∃:V, t é qualquer constante nova da assinatura expandida que ainda não tenha sido usada na árvore em aplicações de regras ∀:F ou ∃:V