INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica e Computabilidade 2024.1

Segunda Chamada da Prova 1

17 de julho de 2024

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou em listas de exercícios, devendo apenas ser quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1.

Definição. Um conjunto de fórmulas da LC é chamado

- *satisfazível* se existe um contexto que torna todos os seus elementos verdadeiros simultaneamente;
- *finitamente satisfazível* se cada subconjunto finito seu é satisfazível.

Seja $\Sigma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ um conjunto infinito de fórmulas da LC. Recursivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$\begin{aligned} T_0 &= \text{uma árvore de avaliação completa cuja raiz é rotulada } \varphi_0 : V \\ S_n &= \text{a árvore de avaliação obtida de } T_n \text{ estendendo cada ramo aberto} \\ &\qquad \text{de } T_n \text{ com um novo nó rotulado } \varphi_{n+1} : V \\ T_{n+1} &= \text{uma árvore de avaliação completa obtida a partir de } S_n. \end{aligned}$$

a (2 pontos). Faça a construção de T_3 para o caso específico em que $\Sigma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ é dado pela definição recursiva

$$\varphi_n = \begin{cases} p \to q, & \text{se } n = 0 \\ \varphi_{n-1} \to p, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

b (2 pontos). De volta ao caso geral, prove que se Σ é finitamente satisfazível, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que T_n possui pelo menos um ramo aberto.

c (3 pontos). Prove o seguinte teorema.

Teorema (Teorema da Compacidade da LC). *Um conjunto infinito de fórmulas da LC é satisfazível se e somente se é finitamente satisfazível.*

Você pode usar (**sem provar**) o seguinte resultado sobre árvores infinitas:

Teorema (Lema de Kőnig). *Uma árvore (direcionada) binária infinita tem um ramo infinito, i.e., um caminho (direcionado) infinito começando em sua raiz.*

Dica: Em uma das direções, note que as árvores T_n "convergem" para uma grande árvore conforme $n \to \infty$. Lembre-se de como podemos definir um contexto a partir de um ramo aberto de uma árvore completa; isso também funciona para árvores infinitas!

Questão 2. Seja Y o conjunto das fórmulas da LC construídas usando apenas os símbolos proposicionais e os conectivos $\neg$, $\leftrightarrow$.

a (2 pontos). Prove que, para toda fórmula $\varphi \in Y$, se φ possui pelo menos uma ocorrência do conectivo $\leftrightarrow$, então φ é V em uma quantidade par de linhas de sua tabela-verdade.

b (2 pontos). Conclua que o conjunto de conectivos $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *não* é completo.

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica e Computabilidade 2024.1

Segunda Chamada da Prova 2

17 de julho de 2024

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou em listas de exercícios, devendo apenas ser quando fizer isso. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1 (2 pontos). Dizemos que um conjunto Σ de sentenças da LPO em uma assinatura $\mathcal{A}$ é *satisfeito* por uma estrutura para essa assinatura se a estrutura satisfaz todas as sentenças de Σ.

Seja $\mathcal{A}_0$ a assinatura com apenas um símbolo para relação binária R. Mostre que

$$\begin{aligned}\Sigma_0 = \{&\forall x\, \exists y\, (xRy),\\ &\neg\exists x\, (xRx),\\ &\forall x, y, z\, [(xRy \wedge yRx) \;\rightarrow\; xRz]\}\end{aligned}$$

não é satisfeito por nenhuma estrutura para $\mathcal{A}_0$ com domínio finito.

Questão 2 (2,5 pontos). Mostre que $\varphi_0, \psi_0 \vdash \beta_0$, onde

$$\begin{aligned}\varphi_0 &:= \forall x, y\, (xRy \rightarrow yRx)\\ \psi_0 &:= \forall x, y, z\, [(xRy \wedge yRx) \;\rightarrow\; xRz]\\ \beta_0 &:= \forall x\, [(\exists y\, (xRy)) \;\rightarrow\; xRx]\end{aligned}$$

Questão 3 (2 pontos). Mostre que $\varphi_1 \nvDash \psi_1$, onde

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x\, [P(x) \vee Q(x)]\\ \psi_1 &:= [\forall x\, P(x)] \;\vee\; [\forall x\, Q(x)]\end{aligned}$$

Questão 4. Dada uma fórmula φ da lógica proposicional, com ocorrências apenas dos símbolos proposicionais

$$p_0, p_1, \ldots, p_n,$$

e dadas fórmulas

$$\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$$

da lógica de primeira ordem, seja

$$\varphi[p_0 := \psi_0,\, p_1 := \psi_1, \ldots, p_n := \psi_n]$$

a fórmula da LPO obtida a partir de φ substituindo *todas* as ocorrências de cada p_i pela fórmula ψ_i correspondente.

Por exemplo, com $\varphi := (p \rightarrow q) \rightarrow p$, temos que

$$\varphi[p := xRy,\, q := \forall z(z = w \vee zRy)]$$

é a fórmula

$$(xRy \rightarrow \forall z(z = w \vee zRy)) \rightarrow xRy.$$

a (2,5 pontos). Prove que se φ é uma tautologia da lógica proposicional (i.e., verdadeira em qualquer linha de sua tabela de verdade) com ocorrências apenas dos símbolos proposicionais $p_0, \ldots, p_n$,, então

$$\varphi[p_0 := \psi_0, \ldots, p_n := \psi_n]$$

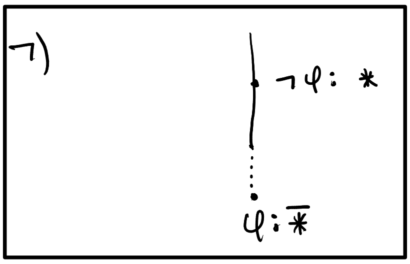
é uma fórmula válida da LPO, i.e., é verdadeira em qualquer estrutura e para qualquer atribuição das variáveis livres.

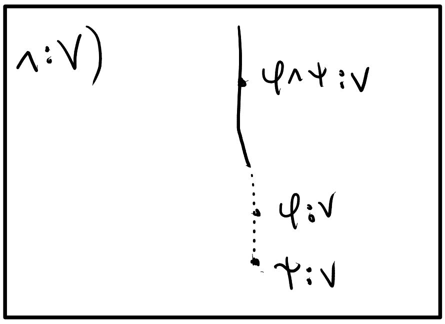
b (2 pontos). Mostre uma fórmula válida da LPO (em alguma assinatura qualquer de sua escolha) que *não* é o resultado de uma substituição como acima para nenhuma tautologia proposicional.

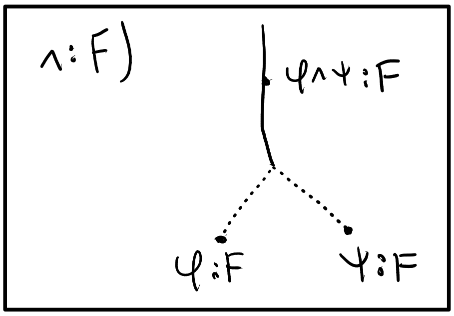
Regras de Manipulação

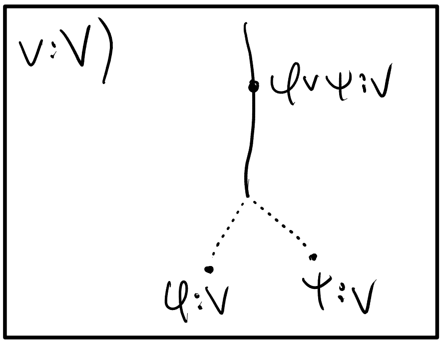
ramo da árvore atual

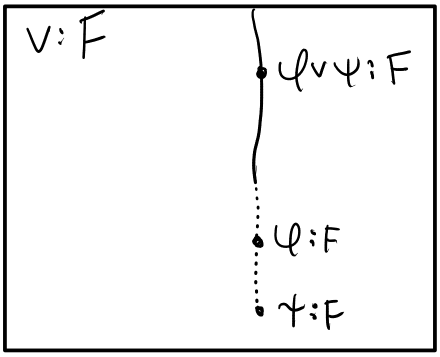
ramo(s) expandido(s)

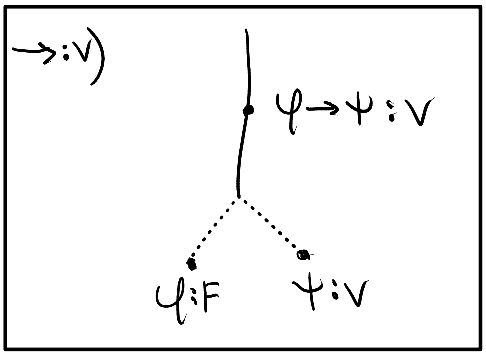


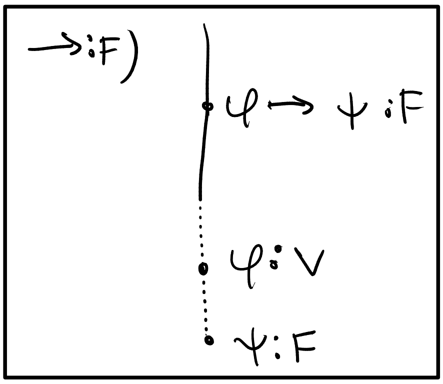


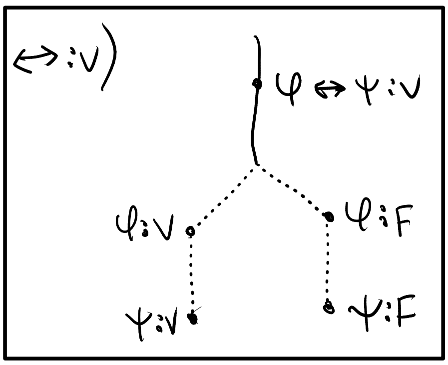


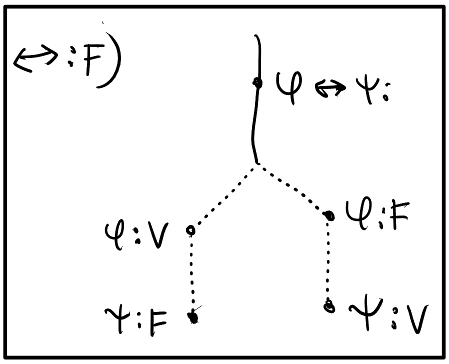


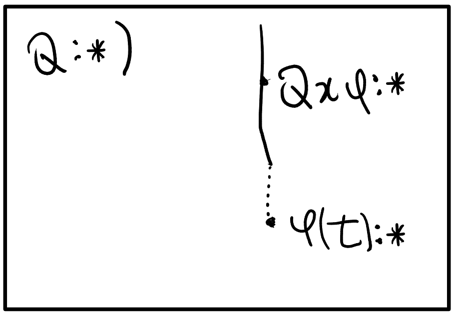












onde

- Q é ∀ ou ∃
- * é V ou F
- Nas regras ∀:V e ∃:F, t é qualquer termo fechado da assinatura expandida.
- Nas regras ∀:F e ∃:V, t é qualquer constante nova da assinatura expandida que ainda não tenha sido usada na árvore em aplicações de regras ∀:F ou ∃:V