Matemática Discreta 2024-2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 2

Entregue todas as questões marcadas com * até
14 de outubro às 20:00
Em todas as questões, você sempre pode usar tudo que foi feito em sala ou que apareceu em listas de exercícios anteriores (mesmo questões que você não tenha resolvido), mas deve citar claramente o que está usando.

Questão 1. Qual é o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos, se exigirmos que eles contenham um dado elemento fixo?

Questão 2. Mostre que um conjunto não-vazio tem o mesmo número de subconjuntos ímpares (i.e., subconjuntos com um número ímpar de elementos) que de subconjuntos pares.

***Questão 3.** Em um bilhete de loteria esportiva, você tem que apostar 1, 2, ou X para cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras você pode preencher um bilhete?

Questão 4.

a. Temos 20 presentes diferentes que desejamos distribuir para 12 crianças. Não é exigido que toda criança obtenha algo; poderia acontecer de darmos todos os presentes à mesma criança. De quantas maneiras podemos distribuir os presentes?

*** b.** Temos 20 *tipos* de presentes, sendo mais do que 12 unidades de cada tipo. Desejamos dar presentes a 12 crianças. Novamente, não é exigido que toda criança obtenha algo; mas nenhuma criança pode ganhar duas cópias do mesmo presente. De quantas maneiras podemos dar os presentes para as crianças?

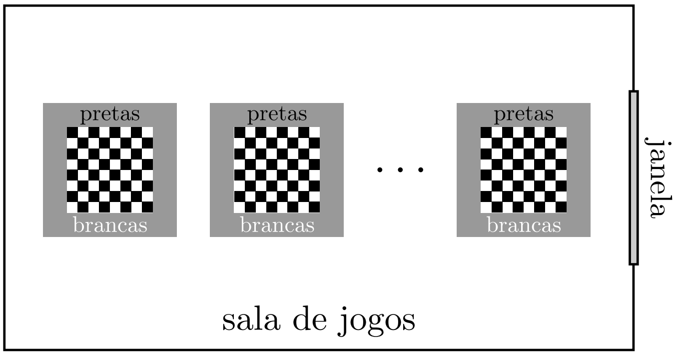
***Questão 5.** Alice tem 10 bolas, todas **distintas**, e 10 baldes, todos **idênticos**. Ela começa colocando as 10 bolas dentro de um dos baldes. Agora, ela repete o seguinte procedimento até que cada balde tenha exatamente uma bola: pegar um balde com pelo menos 2 bolas, e jogar algumas (mas não todas!) dessas bolas para um balde vazio. Mostre que o número de maneiras diferentes para ela realizar esse procedimento é

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{9}{2} \cdot \dots \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{2}$$

Dica: imagine o procedimento todo ao contrário! Vista ao contrário, como fica a operação do enunciado (jogar uma parte das bolas de um balde para outro vazio, sem esvaziar o primeiro)?

***Questão 6.** Qual é o número de maneiras de colorir n objetos distintos com 3 cores, se cada cor tem que ser usada pelo menos uma vez?

Questão 7. $2n$ pessoas chegam a uma sala de jogos a fim de jogarem xadrez em n mesas. As mesas estão todas arrumadas em uma mesma fileira, e os tabuleiros já estão arranjados de maneira que as peças brancas todas estão pra um mesmo lado nos tabuleiros:



Uma *rodada* consiste de n partidas simultâneas entre as pessoas, dispostas nas n mesas.

Lembrete: no xadrez, as peças brancas sempre fazem a primeira jogada, e isso é considerado uma vantagem.

a. Supondo que entre as pessoas não haja nenhuma preferência em relação às mesas em que vão jogar, quantas são as possíveis rodadas?

*** b.** Agora supondo que cada pessoa queira ficar o mais próximo possível da janela, quantas são as possíveis rodadas? Considere que as pessoas sentadas em uma mesma mesa estão à mesma distância da janela.

Questão 8. Prove as igualdades abaixo *sem usar a fórmula* $\binom{a}{b} = \dfrac{a!}{(a-b)!b!}$.

a. Se $n - 2 \geqslant k$, então

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$$

b.
$$1 + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \cdots + 2^{n-1}\binom{n}{n-1} + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$$

*** c.** Se $n \geqslant k$, então
$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

*** d.** Se $x, y \geqslant k$, então
$$\binom{x+y}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{x}{i}\binom{y}{k-i}$$

e. Se k é par e $n - 1 \geqslant k$, então
$$\sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{\ell} \binom{n}{\ell} = \binom{n-1}{k}$$

Questão 9. 20 pessoas estão sentadas ao redor de uma mesa. De quantas maneiras podemos escolher um grupo de pessoas dessa mesa, sem que no grupo haja pessoas que eram vizinhas na mesa?

Questão 10. Há uma classe em que todos são rapazes. Existem 18 rapazes que gostam de jogar xadrez, 23 gostam de jogar futebol, 21 gostam de ciclismo e 17 gostam de alpinismo. O número daqueles que gostam de jogar xadrex e futebol é 9. Existem 7 rapazes que gostam de jogar xadrez e de ciclismo, 6 rapazes que gostam de xadrez e alpinismo, 12 deles gostam de futebol e de ciclismo, 9 rapazes gostam de futebol e de alpinismo, e finalmente 12 deles gostam de ciclismo e de alpinismo. Existem 4 rapazes que gostam de xadrez, futebol e alpinismo, 3 que gostam de xadrez, futebol e alpinismo, 5 que gostam de xadrez, ciclismo e alpinismo, e 7 que gostam de futebol, ciclismo e alpinismo. Finalmente existem 3 rapazes que gostam de todas as 4 atividades. Adicionalmente, sabemos que todo mundo gosta de alguma dessas atividades. Quantos rapazes existem na classe?

Questão 11. Qual é o resultado da seguinte soma?
$$0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + (n-1) \cdot \binom{n}{n-1} + n \cdot \binom{n}{n}$$

Experimente, conjecture uma resposta e então prove-a. (Tente provar o resultado por indução e também por argumentos combinatórios.)

Questão 12. Em uma turma de rapazes, sabemos que x deles gostam de jogar xadrez, f gostam de jogar futebol, c gostam de ciclismo e m gostam de montanhismo. O número daqueles que gostam de ambos xadrez e futebol é x_f. Existem x_c rapazes que gostam de xadrez e ciclismo, x_m rapazes que gostam de xadrez e montanhismo, f_c deles que gostam de futebol e ciclismo, f_m rapazes gostam de futebol e montanhismo, e finalmente c_m deles gostam de ciclismo e montanhismo. Não sabemos quantos rapazes gostam de (por exemplo) xadrez, futebol e montanhismo, mas sabemos que todos gostam de alguma dessas atividades. Gostaríamos de saber quantos rapazes existem na turma.

a. Mostre por meio de exemplos que isso não está determinado pelo que sabemos.

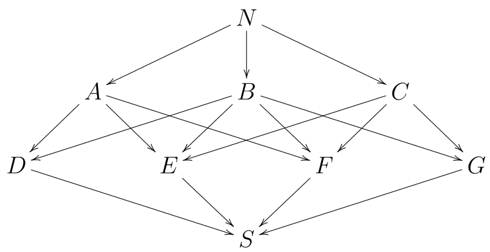
b. Prove que podemos pelo menos concluir que o número de rapazes na turma é no máximo

$$x + f + c + m$$

e no mínimo

$$x + f + c + m - (x_f + x_c + x_m + f_c + f_m + c_m).$$

Questão 13. Cada seta na figura abaixo tem 2 extremos rotulados e representa a única maneira possível de se mover do ponto rotulado que a inicia para o outro ponto rotulado que a termina. Quantos maneiras existem de ir de N para S através de pontos intermediários?



Questão 14. Qual o número total de quadrados que podem ser desenhados usando as linhas de uma folha quadriculada quadrada de lado n, i.e., com n^2 células?

Questão 15. O alfabeto da língua portuguesa possui 26 letras, sendo 21 consoantes e 5 vogais.

a. Quantas palavras de 2 letras podemos formar?

b. Quantas palavras de 2 letras distintas podemos formar?

c. Quantas palavras podemos formar com uma consoante seguida de uma vogal?

d. Quantas palavras de duas letras podemos formar com uma consoante e uma vogal, em qualquer ordem?

e. Quantas palavras de 2 letras que possuem ao menos uma vogal podem ser formadas?

Atenção: nesta questão, *palavra* não precisa ser algo que já exista nos dicionários.

Questão 16. Uma pessoa vai a uma loja comprar 4 cadeiras iguais e 1 mesa. Chegando lá, o vendedor mostra para ela vários modelos, sendo 7 modelos de mesa e 13 modelos de cadeira. Quantas possibilidades existem da pessoa efetuar a sua compra?

Questão 17. Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, em que as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a 1a letra da placa de- termina um estado deste país. Considerando um alfabeto com 26 letras, qual é o número máximo de carros que cada estado poderá emplacar?

Questão 18. Determine a quantidade de números de 3 algarismos, maiores que 500, que podem ser formados com os algarismos 3, 5, 6, 7 e 9.

Questão 19. Uma sala possui 10 cadeiras numeradas, de 1 a 10, colocadas em fila. De quantas maneiras duas pessoas podem se sentar nestas cadeiras, uma pessoa em cada cadeira, de modo que haja ao menos uma cadeira vazia entre elas?

Questão 20. De quantas formas 5 homens e 5 mulheres podem formar uma fila indiana, de maneira que os homens ocupem posições consecutivas na fila?

Questão 21. Um *pareamento* de um conjunto X é um conjunto obtido pela aplicação sucessiva da operação "tomar um subconjunto de tamanho 2" ao universo X, sem reposição, até que não seja mais possível aplicá-la. Por exemplo, a partir de $X = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, podemos formar o pareamento $\{\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}, \{G, H\}\}$ (dentre vários outros).

a. Se um conjunto tem $2n$ elementos, quantos são os seus pareamentos?

b. Se um conjunto tem $2n+1$ elementos, quantos são os seus pareamentos?

Questão 22. 5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?

***Questão 23.** De quantos modos uma pirâmide pentagonal de base regular pode ser pintada com 6 cores diferentes, de maneira que cada face receba uma cor diferente?

***Questão 24.** Quantas rodas podem ser formadas com 6 meninas, de modo que duas delas (específicas) se sentem lado a lado?

Questão 25. De quantos modos 8 pessoas podem sentar em volta de uma mesa circular, de maneira que duas delas (específicas) não se sentem lado a lado?

***Questão 26.** De quantos modos 10 casais podem sentar em uma roda gigante que tem 10 bancos de 2 lugares cada um, se considerarmos que há diferença entre as pessoas se sentarem do lado direito ou esquerdo de cada banco?

Questão 27. Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $n \geqslant 2k+1$. Suponha que você queira formar um subconjunto de $2k+1$ elementos no universo $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ (que tem n elementos) de acordo com o seguinte procedimento: primeiro você escolhe a *mediana* do subconjunto (i.e., o elemento que ficará exatamente no meio, quando você ordenar o subconjunto em ordem crescente); depois, você escolhe os k elementos menores que a mediana; finalmente, você escolhe os k maiores que a mediana. Formule a identidade combinatória que você obtém a partir desse procedimento pelo método "contar duas vezes a mesma quantidade".

Questão 28. Para controlar o estoque de um produto, uma empresa usa etiquetas formadas por uma parte literal e outra numérica, nesta ordem. A parte literal é formada de 3 letras do nosso alfabeto, e a parte numérica é formada por 4 algarismos em base 10. Sabendo-se que pode haver repetição de letras, mas não de algarismos, qual é a quantidade do produto que pode ser etiquetada sem que haja coincidência de etiquetas?

Questão 29. Existem 26 casas idênticas que vão ser pintadas, de maneira que 5 vão ser pintadas de verde, 6 vão ser pintadas de amarelo, 7 vão ser pintadas de azul e 8 vão ser pintadas de branco. De quantas maneiras estas casas podem ser pintadas, se as posições relativas entre as casas não são importantes?

***Questão 30.** Uma *composição* de um número natural n é uma sequência de números naturais <u>maiores que 0</u> cuja soma é n. Por exemplo, $(1, 2, 3)$ e $(1, 3, 2)$ são duas composições <u>diferentes</u> de 6, ambas de comprimento 3.

Prove que para todos naturais $n \geqslant k$ temos que n possui exatamente $\binom{n-1}{k-1}$ composições de comprimento k.

Dica: Tente modelar o problema usando a ideia de "bolas e barras" $\bullet\bullet\bullet||$.

***Questão 31.** Suponha que você tenha descoberto os seguintes fatos sobre a minha senha em uma plataforma online:

- a senha tem comprimento 8

- a senha só usa as letras A, B, C
- cada umas dessas letras é usada pelo menos 1 vez

Quantas tentativas, no máximo, você tem que fazer até descobrir a minha senha?