

Matemática Discreta 2024-2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

Entregue todas as questões marcadas com * até
29 de novembro às 20:00

Em todas as questões, você sempre pode usar tudo que foi feito em sala ou que apareceu em listas de exercícios anteriores (mesmo questões que você não tenha resolvido), mas deve citar claramente o que está usando.

Há uma tabela de polinômios e suas raízes no final desse documento

Questão 1. Em cada item abaixo, encontre uma forma fechada para a função F com domínio \mathbb{N} .

$$* \text{ a. } F(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0 \\ 210, & \text{se } n = 1 \\ 210, & \text{se } n = 2 \\ -5F(n-1) + 62F(n-2) + 336F(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{b. } F(n) = \begin{cases} 6, & \text{se } n = 0 \\ 12, & \text{se } n = 1 \\ 108, & \text{se } n = 2 \\ 3F(n-1) + 36F(n-2) - 108F(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{c. } F(n) = \begin{cases} 85, & \text{se } n = 0 \\ 1020, & \text{se } n = 1 \\ 1020, & \text{se } n = 2 \\ 5F(n-1) + 68F(n-2) - 288F(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$* \text{ d. } F(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0 \\ 3, & \text{se } n = 1 \\ F(n-1) + 2 \cdot F(n-2) + 108 \cdot n^2 - 36 \cdot n + 60, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathbf{e.} \quad F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ 1, & \text{se } n = 2 \\ -4F(n-1) - 5F(n-2) - 2F(n-3) - 36n - 144, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathbf{f.} \quad F(n) = \begin{cases} 9, & \text{se } n = 0 \\ 18, & \text{se } n = 1 \\ 18, & \text{se } n = 2 \\ 3F(n-1) - 4F(n-3) - 8n^2 + 12n, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathbf{g.} \quad F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 2, & \text{se } n = 1 \\ 2, & \text{se } n = 2 \\ 9F(n-1) - 26F(n-2) + 24F(n-3) + 18n^2 - 48n + 30, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$*\mathbf{h.} \quad F(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \\ 12, & \text{se } n = 2 \\ 17F(n-1) - 92F(n-2) + 160F(n-3) - 84, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathbf{i.} \quad F(n) = \begin{cases} 9, & \text{se } n = 0 \\ 18, & \text{se } n = 1 \\ 18, & \text{se } n = 2 \\ 9F(n-1) - 24F(n-2) + 20F(n-3) + 36, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathbf{j.} \quad F(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \\ 24, & \text{se } n = 2 \\ -4F(n-1) + 4F(n-2) + 16F(n-3) - 3 \cdot 4^n, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$*\mathbf{k.} \quad F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 2, & \text{se } n = 1 \\ 2, & \text{se } n = 2 \\ 9F(n-1) - 26F(n-2) + 24F(n-3) - 4 \cdot 4^n, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Questão 2. Em cada item abaixo, encontre duas recorrências lineares diferentes, uma da forma

$$F(n) = \begin{cases} f_0, & \text{se } n = 0 \\ f_1, & \text{se } n = 1 \\ \vdots & \\ f_{k-1}, & \text{se } n = k - 1 \\ \sum_{i=1}^k a_i F(n - i), & \text{c.c.} \end{cases}$$

e outra da forma

$$G(n) = \begin{cases} g_0, & \text{se } n = 0 \\ g_1, & \text{se } n = 1 \\ \vdots & \\ g_{\ell-1}, & \text{se } n = \ell - 1 \\ \left(\sum_{i=1}^{\ell} b_i G(n - i) \right) + c \cdot d^n, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

com $c, d \neq 0$, tais que ambas F e G tenham como forma fechada a expressão dada.

Obs: em cada item, você deve dar valores numéricos para k , para todos os f_i (com $i < k$), para todos os a_i (com $1 \leq i \leq k$), para ℓ , para todos os g_j (com $j < \ell$), para todos os b_i (com $1 \leq i \leq \ell$), para c e para d .

* **a.** $F(n) = G(n) = (3 \cdot 2^n) + (4 \cdot 3^n) + (5 \cdot 4^n)$

b. $F(n) = G(n) = (3 \cdot 2^n) + (4 \cdot 3^n) + (5 \cdot 2^n \cdot n)$

c. $F(n) = G(n) = (3 \cdot 2^n) + (4 \cdot 3^n) + (5 \cdot 3^n \cdot n)$

d. $F(n) = G(n) = (3 \cdot 2^n) + (4 \cdot 2^n \cdot n) + (5 \cdot 2^n \cdot n^2)$

* **e.** $F(n) = G(n) = (x_0 \cdot y^n) + (x_1 \cdot y^n \cdot n) + (x_2 \cdot y^n \cdot n^2)$,

onde $x_0, x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ (naturalmente, sua resposta vai ficar em função de x_0, x_1, x_2, y)

Polinômio	Raízes			
$x^2 - 5x + 6$	2	3		
$x^2 - 4x + 4$	2	2		
$x^2 - 3x - 4$	-1	4		
$x^2 - x - 2$	-1	2		
$x^2 + 5x - 24$	-8	3		
$x^2 + 5x + 4$	-4	-1		
$x^2 + 6x + 8$	-4	-2		
$x^2 + 12x + 27$	-9	-3		
$x^2 + 13x + 36$	-9	-4		
$x^3 - 17x^2 + 92x - 160$	4	5	8	
$x^3 - 3x^2 - 36x + 108$	-6	3	6	
$x^3 - 3x^2 + 4$	-1	2	2	
$x^3 - 5x^2 - 68x + 288$	-8	4	9	
$x^3 - 6x^2 + 5x + 12$	-1	3	4	
$x^3 - 9x^2 + 24x - 20$	2	2	5	
$x^3 - 9x^2 + 26x - 24$	2	3	4	
$x^3 + x^2 - 36x - 36$	-6	-1	6	
$x^3 + 2x^2 - 71x - 252$	-7	-4	9	
$x^3 + 3x^2 - 24x - 80$	-4	-4	5	
$x^3 + 4x^2 + 5x + 2$	-2	-1	-1	
$x^3 + 4x^2 - 4x - 16$	-4	-2	2	
$x^3 + 5x^2 - 62x - 336$	-7	-6	8	
$x^3 + 5x^2 - 34x - 80$	-8	-2	5	
$x^3 + 9x^2 - 25x - 225$	-9	-5	5	
$x^3 + 14x^2 + 9x - 324$	-9	-9	4	
$x^4 - 85x^2 - 60x + 864$	-8	-4	3	9
$x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36$	-1	2	3	6
$x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 111x - 180$	-4	3	3	5
$x^4 - 3x^3 - 51x^2 - 37x + 90$	-5	-2	1	9
$x^4 + 3x^3 - 48x^2 - 16x + 384$	-8	-3	4	4
$x^4 + 5x^3 - 71x^2 - 453x - 378$	-7	-6	-1	9
$x^4 + 6x^3 - 29x^2 - 114x - 80$	-8	-2	-1	5
$x^4 + 10x^3 + 9x^2 - 108x - 108$	-6	-6	-1	3
$x^4 + 12x^3 - 33x^2 - 764x - 2016$	-9	-7	-4	8
$x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 118x - 240$	-8	-5	-2	3
$x^4 + 16x^3 + 62x^2 - 16x - 63$	-9	-7	-1	1
$x^4 + 23x^3 + 195x^2 + 721x + 980$	-7	-7	-5	-4