Matemática Discreta 2024-2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 4

Entregue todas as questões marcadas com * até
13 de dezembro às 20:00

Ao longo de toda essa lista de exercícios, grafos são *simples* (nenhum vértice é vizinho de si mesmo, e entre qualquer par de vértices há no máximo 1 aresta) e *colorações* são sempre de vértices.

Questão 1. Encontre o maior inteiro positivo x para o qual a seguinte frase é um teorema (e prove isso).

"Se G é um grafo conexo qualquer, então para quaisquer x arestas de G existe uma árvore geradora de G que as contém."

Questão 2. Dado um grafo G, chamamos de seu *complemento* o grafo $\bar{G}$ que tem exatamente os mesmos vértices de G, e que tem como arestas exatamente as que *não estão* em G.

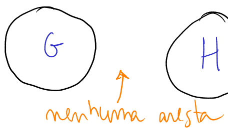
a. Dê dois exemplos de grafos *autocomplementares*, i.e., grafos para os quais G e $\bar{G}$ são na verdade o mesmo grafo[1].

b. Prove que para qualquer grafo G temos que G ou $\bar{G}$ é conexo, e que esse "ou" não é necessariamente exclusivo.

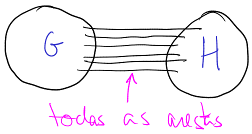
Questão 3. Dados grafos G e H, sua *união disjunta* é o grafo obtido pelo seguinte procedimento:

- primeiro, renomeie os vértices de H para que nenhum esteja também em G;
- agora, construa um grafo cujos vértices são os de G e os da nova versão de H, e adicione ao novo grafo apenas arestas de G e as de H (ou seja: não ligue vértices de G que já não estivessem ligados, idem para H, e não ligue nenhum vértice de G com nenhum de H)

[1] "o mesmo grafo" aqui quer dizer que podemos apenas trocar os nomes dos vértices de um dos grafos de forma a obter exatamente o outro.



A *junção* de G e H é o grafo obtido da união disjunta de G e H adicionando *todas* as arestas entre vértices de G e H.



Definição 1. O conceito de *cografo* é agora definido recursivamente pelas seguintes regras:

B) O grafo com 1 vértice é um cografo;

RUD) Se G e H são cografos, então sua união disjunta também é;

RJ) Se G e H são cografos, sua junção também é.

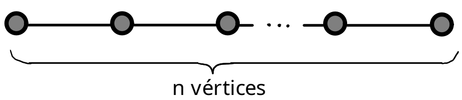
* **a.** Prove que os cografos também são exatamente os grafos que podem ser obtidos usando a seguinte construção recursiva Constr_2:

B) O grafo com 1 vértice é um cografo;

RUD) Se G e H são cografos, então sua união disjunta também é;

RC) Se G é cografo, o seu complemento $\bar{G}$ (definição dada na Questão 2) também é.

Definição 2. Dado $n \geqslant 1$, denotamos por P_n o *grafo caminho* com n vértices (e portanto $n - 1$ arestas):

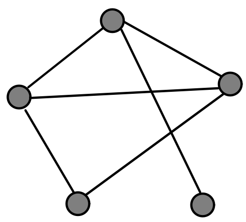


Dê uma definição recursiva para esses grafos.

c. Prove que P_3 é um cografo.

* **d.** Prove que se $k \geqslant 4$ então nenhum cografo tem P_k como subgrafo induzido.

* **e.** Prove que o grafo abaixo não é um cografo.



Questão 4. Um grafo *completo* é um grafo que tem todas as arestas que poderia ter. Assim, para cada $n \geqslant 1$, há exatamente 1 grafo completo com n vértices, denotado K_n.

a. Prove que K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas.

b. Prove que para todos naturais $a, b \geqslant 1$ temos que K_{a+b} é a *junção* (vide Questão 3 acima) de K_a e K_b.

* **c.** Usando os itens acima (sem precisar prová-los), prove que para todos naturais $a, b \geqslant 1$ temos

$$\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + ab + \binom{b}{2}$$

Questão 5. Seja d um número natural.

Considere os grafos que podem ser obtidos de acordo com o seguinte procedimento recursivo "Proc$_d$":

- Base: grafo com apenas 1 vértice
- Recursivo: dado G já construído, adicionar um novo vértice com no máximo d arestas para os vértices de G

a. Dê exemplo de um grafo que *não possa* ser construído por Proc$_d$ para $d = 3$.

b. Prove que todo grafo que pode ser construído por Proc$_d$ pode ser colorido com no máximo $d + 1$ cores.

c. Prove que se um grafo G tem a propriedade "em todo subgrafo de G há pelo menos um vértice com grau no máximo d", então G pode ser colorido com no máximo $d + 1$ cores.

Questão 6. Dado um grafo G com vértices $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, a sua *sequência de graus* é a reordenação da sequência $d(v_0), d(v_1), \ldots, d(v_{n-1})$ em ordem não-decrescente (i.e., cada número é menor ou igual ao próximo na sequência).

Por exemplo, a sequência de graus do grafo da Questão 3(e) é 1, 2, 3, 3, 3.

a. Quais são os grafos que têm como sequência de graus $1, 1, 2, 2, 2, 2$?

b. Dado $n \geqslant 1$, quais são os grafos que têm como sequência de graus exatamente a sequência de comprimento n com todos os elementos iguais a 0?

c. Dado $n \geqslant 1$, quais são os grafos que têm como sequência de graus exatamente a sequência de comprimento n com todos os elementos iguais a 1? Lembre-se de que estamos falando apenas de grafos simples.

d. Dado $n \geqslant 1$, quais são os grafos que têm como sequência de graus exatamente a sequência de comprimento n com todos os elementos iguais a 2? Lembre-se de que estamos falando apenas de grafos simples.

Questão 7. Seja G um grafo e seja C um ciclo de tamanho pelo menos 4 em G. Uma aresta de G que ligue dois vértices não consecutivos de C é chamada de uma *corda* de C.

* **a.** Prove que todo grafo onde todo vértice tenha grau pelo menos 3 contém um ciclo com corda. (*Dica*: tente fazer um argumento parecido com o que usamos para provar que toda árvore com vértice de grau d tem pelo menos d vértices de grau 1.)

b. Um grafo é chamado *cordal* se todos os seus ciclos de tamanho pelo menos 4 possuem pelo menos uma corda.

Prove que todos os grafos que podem ser construídos pelo seguinte procedimento recursivo são cordais:

- Base: grafo com 1 vértice
- Recursivo: dado G já construído, adicionar um novo vértice e torná-lo vizinho de um subconjunto qualquer de vértices de G, desde que esses vértices de G já fossem todos vizinhos uns dos outros.

Questão 8. Vamos chamar uma tabela de números (i.e., uma matriz) de *boa* se:

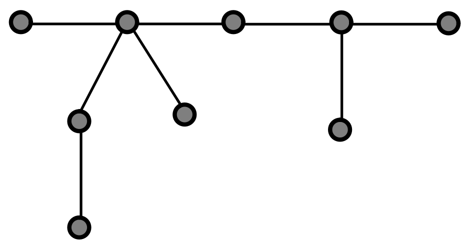
- ela tem 2 linhas e $n - 1$ colunas;
- a primeira linha tem exatamente os números $0, 1, 2, \ldots, n - 2$, nessa ordem;

- cada coluna tem dois números distintos;
- a segunda linha tem apenas elementos do conjunto $\{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$, permitindo repetições.

Dada uma tabela boa, monte um grafo G com vértices $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, e com as arestas dadas pelas colunas da tabela: ligamos o vértice x ao vértice y sse há pelo menos uma coluna na tabela com x em uma das linhas e y na outra (não importa a ordem).

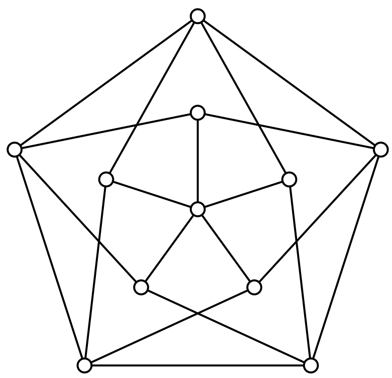
a. Prove que (dependendo da tabela boa) é possível que G seja conexo e também é possível que G seja desconexo.

* **b.** Prove que o seguinte grafo, onde os rótulos dos vértices foram apagados, pode ser obtido a partir de alguma tabela boa:

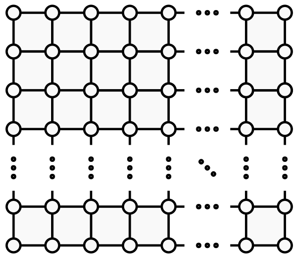


* **c.** Prove que se um grafo conexo pode ser obtido de alguma tabela boa, então ele é necessariamente uma árvore.

***Questão 9.** Prove que o grafo abaixo não pode ser colorido (em vértices) com 3 cores.



Questão 10. Um grafo *grade* é um grafo que pode ser desenhado em uma folha quadriculada, com as linhas da folha sendo as arestas e os cruzamentos das linhas os vértices:

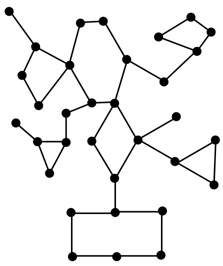


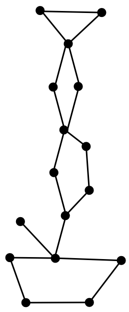
a. Mostre que todo grafo grade pode ser colorido com 2 cores.

b. Mostre que se um grafo grade tem uma quantidade par de linhas ou de colunas, então ele é Hamiltoniano[2].

c. Prove que se um grafo G qualquer pode ser colorido com 2 cores e é Hamiltoniano, então G tem uma quantidade par de vértices. Conclua a recíproca do item anterior: se um grafo grade é Hamiltoniano, então ele tem uma quantidade par de linhas ou de colunas.

Questão 11. Dizemos que um grafo conexo G é um *cacto* se cada uma de suas arestas faz parte de no máximo 1 ciclo.





a. Prove que um grafo conexo G é um cacto se, e somente se, quaisquer dois ciclos distintos em G têm no máximo 1 vértice em comum.

b. Considere a seguinte construção recursiva de grafos, Cact:

- Caso base: construa o grafo com 1 vértice. Declaramos que esse vértice não tem *amigos* nesse grafo.
- Caso recursivo 1: se G é um grafo já construído, adicione um vértice novo v e uma aresta de v a qualquer vértice u de G. Declaramos que no novo grafo os *amigos* de v são os amigos de u mais o próprio u, e que as amizades envolvendo os outros vértices de G não são alteradas.

[2]Lembrete: um grafo é *Hamiltoniano* se ele tem um ciclo gerador (i.e., existe um passeio fechado que passa por todos os vértices do grafo, e cuja única repetição de vértices é o primeiro com o último).

- Caso recursivo 2: se G é um grafo já construído, adicione um vértice novo v e arestas de v a dois vértices u_0 e u_1 de G, desde que u_0 e u_1 sejam amigos. Declaramos que *não são amigos entre si* no novo grafo os vértices v, u_0, u_1 e os vértices de G que façam parte de caminhos entre u_0 e u_1. As amizades envolvendo os outros vértices de G não são alteradas.

Prove que todo grafo construído por Cact é um cacto.