Matemática Discreta 2024-2

Prova 1

24 de outubro de 2024

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. O forró é dançado por um par de pessoas, sendo que uma *conduz* a dança e a outra é *conduzida*.

Suponha que em uma festa de forró haja $2n$ pessoas, com n delas A_0, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ só gostando de dançar conduzindo e as demais n delas B_0, B_1, $\ldots$, B_{n-1} só gostando de dançar sendo conduzidas.

Suponha também que para cada $i < n$, a pessoa A_i não aceite dançar com B_i mas aceite dançar com todos os outros B_j, e igualmente que B_i não aceite dançar com A_i mas aceite dançar com todos os outros A_j.

a (2 pontos)**.** A cada música na festa, n pares dançam no salão. Para que cada pessoa que quer conduzir dance exatamente 1 música com cada pessoa que quer ser conduzida (e com quem ela aceite dançar), quantas músicas devem tocar na festa?

b (2 pontos)**.** De quantas maneiras diferentes os $2n$ dançarinos podem formar n pares de maneira que cada pessoa que gosta de conduzir esteja pareada com alguém que goste de ser conduzido (e com quem ela aceite dançar)?

(Como as pessoas se movem no salão ao longo da dança, não consideramos que seja importante nenhum tipo de *ordem* entre os pares de dançarinos.)

Dica: se não houvesse nenhuma restrição entre os dançarinos, para gerar uma coleção de n pares bastaria manter os A's fixos em uma ordem qualquer e permutar todos os B's...

c (2 pontos)**.** Finalmente, se no meio da festa começa a tocar música de São João, de quantas maneiras diferentes os $2n$ dançarinos podem formar uma grande roda de n pares para a *quadrilha*, sendo cada par formado por uma pessoa que gosta de dançar e uma que gosta de ser conduzida (com quem ela aceite dançar)?

(A posição relativa dentro da grande roda é importante para cada pessoa, mas como em toda boa quadrilha a roda como um todo vai, er, *rodar* pelo salão.)

Questão 2. Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ tais que $0 < k \leqslant n$.

a (2,5 pontos)**.** Sem usar a fórmula $\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!}$, prove que

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{\ell=0}^{n-k+1} \ell \cdot \binom{n-\ell}{k-1}$$

Dica: Como $k > 0$, um conjunto de $k+1$ números com certeza tem um *segundo menor* elemento!

b (2,5 pontos)**.** Considere um universo $U = \{0, 1, \ldots, n\}$. Dado um subconjunto X de U de tamanho k, seja $\min(X)$ o menor elemento de X.

Prove que, fazendo X variar dentre *todos* os subconjuntos de tamanho k em U, a média aritmética dos valores $\min(X)$ encontrados é $\dfrac{n-k+1}{k+1}$.

Por exemplo, para os subconjuntos de tamanho $k = 3$ do universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que a média de $\min(X)$ é $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$:

X	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,4\}$	$\{0,1,5\}$	$\{0,2,3\}$
$\min(X)$	0	0	0	0	0

X	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,5\}$	$\{0,3,4\}$	$\{0,3,5\}$	$\{0,4,5\}$
$\min(X)$	0	0	0	0	0

X	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,5\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,3,5\}$
$\min(X)$	1	1	1	1	1

X	$\{1,4,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,3,5\}$	$\{2,4,5\}$	$\{3,4,5\}$
$\min(X)$	1	2	2	2	3

Boa prova!