

Matemática Discreta 2024.1

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

Entregue todas as questões marcadas com * até

28 de junho às 20:00

Em todas as questões, você sempre pode usar tudo que foi feito em sala ou que apareceu em listas de exercícios anteriores (mesmo questões que você não tenha resolvido), mas deve citar claramente o que está usando.

Na última página há uma tabela de polinômios e suas raízes

Nesta lista de exercícios, você sempre pode *testar* as suas respostas usando a sua linguagem de programação favorita, em particular se ela permite trabalhar facilmente com inteiros de tamanho arbitrário e números complexos (por exemplo, Python 3)

Questão 1. Encontre formas fechadas para as seguintes relações de recorrência que definem funções com domínio \mathbb{N} :

$$\text{a. } F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ F(n-1), & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$* \text{ b. } F(n) = \begin{cases} 17, & \text{se } n = 0 \\ -3F(n-1) + 48, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{c. } F(n) = \begin{cases} 30, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n = 1 \\ 1140, & \text{se } n = 2 \\ -3F(n-1) + 24F(n-2) + 80F(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$* \text{ d. } F(n) = \begin{cases} 9, & \text{se } n = 0 \\ -26, & \text{se } n = 1 \\ 182, & \text{se } n = 2 \\ -3F(n-1) + 24F(n-2) + 80F(n-3) + 2000n - 6000, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{e. } F(n) = \begin{cases} 8, & \text{se } n = 0 \\ -29, & \text{se } n = 1 \\ 411, & \text{se } n = 2 \\ -3F(n-1) + 24F(n-2) + 80F(n-3) + 9 \cdot (-4)^n, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$* \text{ f. } F(n) = \begin{cases} 10, & \text{se } n = 0 \\ 80, & \text{se } n = 1 \\ 400, & \text{se } n = 2 \\ 2300, & \text{se } n = 3 \\ 10F(n-1) - 25F(n-2) + 36F(n-4), & \text{c.c.} \end{cases}$$

***Questão 2.** Sejam α , β e γ as 3 raízes distintas da equação

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Observação: Apenas α é um número real, β e γ são complexos (conjugados):

$$\alpha \approx 1.8392867552141612$$

$$\beta \approx -0.4196433776070806 + 0.6062907292071994i$$

$$\gamma \approx -0.4196433776070806 - 0.6062907292071994i$$

Mas os valores exatos não são importantes para essa questão.

Encontre (deixando os valores α , β e γ apenas indicados!) constantes (complexas) c_α , c_β e c_γ tais que

$$T(n) = c_\alpha \cdot \alpha^n + c_\beta \cdot \beta^n + c_\gamma \cdot \gamma^n$$

seja uma forma fechada da recorrência de *Tribonacci* abaixo

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n = 1 \\ 1, & \text{se } n = 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + T(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$$

Polinômio	Raízes				
$x^2 - 6x - 16$	-2	8			
$x^2 - 3x - 4$	-1	4			
$x^2 + 2x - 3$	-3	1			
$x^2 + 5x - 24$	-8	3			
$x^2 + 5x + 4$	-4	-1			
$x^2 + 6x + 8$	-4	-2			
$x^2 + 12x + 27$	-9	-3			
$x^2 + 13x + 36$	-9	-4			
$x^3 - 6x^2 + 5x + 12$	-1	3	4		
$x^3 + x^2 - 36x - 36$	-6	-1	6		
$x^3 + 2x^2 - 71x - 252$	-7	-4	9		
$x^3 + 3x^2 - 24x - 80$	-4	-4	5		
$x^3 + 5x^2 - 34x - 80$	-8	-2	5		
$x^3 + 9x^2 - 25x - 225$	-9	-5	5		
$x^3 + 14x^2 + 9x - 324$	-9	-9	4		
$x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36$	-1	2	3	6	
$x^4 - 8x^3 - 19x^2 + 290x - 600$	-6	4	5	5	
$x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 111x - 180$	-4	3	3	5	
$x^4 - 3x^3 - 51x^2 - 37x + 90$	-5	-2	1	9	
$x^4 - 85x^2 - 60x + 864$	-8	-4	3	9	
$x^4 + 3x^3 - 48x^2 - 16x + 384$	-8	-3	4	4	
$x^4 + 5x^3 - 71x^2 - 453x - 378$	-7	-6	-1	9	
$x^4 + 6x^3 - 29x^2 - 114x - 80$	-8	-2	-1	5	
$x^4 + 10x^3 + 9x^2 - 108x - 108$	-6	-6	-1	3	
$x^4 + 12x^3 - 33x^2 - 764x - 2016$	-9	-7	-4	8	
$x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 118x - 240$	-8	-5	-2	3	
$x^4 + 16x^3 + 62x^2 - 16x - 63$	-9	-7	-1	1	
$x^4 + 23x^3 + 195x^2 + 721x + 980$	-7	-7	-5	-4	
$x^5 - 32x^4 + 392x^3 - 2266x^2 + 6039x - 5670$	2	5	7	9	9
$x^5 - 16x^4 + 32x^3 + 406x^2 - 1233x + 810$	-5	1	2	9	9
$x^5 - 12x^4 - 58x^3 + 1008x^2 - 1863x - 2916$	-9	-1	4	9	9
$x^5 - 8x^4 - 46x^3 + 212x^2 + 1005x + 756$	-4	-3	-1	7	9
$x^5 - 6x^4 - 47x^3 + 216x^2 + 316x - 480$	-6	-2	1	5	8
$x^5 - 6x^4 - 20x^3 + 216x^2 - 512x + 384$	-6	2	2	4	4
$x^5 - 4x^4 - 67x^3 + 214x^2 + 1116x - 2520$	-6	-5	2	6	7
$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$	-2	-1	1	2	3
$x^5 + 5x^4 - 43x^3 - 269x^2 - 198x + 504$	-6	-4	-3	1	7
$x^5 + 10x^4 - 27x^3 - 608x^2 - 2288x - 2688$	-7	-4	-4	-3	8