INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Matemática Discreta 2024-2

Segunda Chamada da Prova 1

17 de dezembro de 2024

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. Em um grupo há P pessoas de camisa preta e B pessoas de camisa branca, sendo $B = P + 1$. Queremos selecionar um subgrupo desse grupo, de maneira que dentre os selecionados haja 1 pessoa a mais de camisa branca do que de camisa preta.

a (2 pontos)**.** Mostre que, não importa qual seja o subgrupo formado, a soma da quantidade de pessoas de camisa branca **selecionadas** com a quantidade de pessoas de camisa preta **não selecionadas** é sempre igual.

b (2 pontos)**.** Determine (em função de P e B) os números $x, y \in \mathbb{N}$ tais que $\binom{x}{y}$ é a quantidade de maneiras de formar um subgrupo conforme o desejado.

Questão 2. Sejam n, k números naturais com $k < n$.

a (2 pontos)**.** Seja B_n o conjunto das sequências de 0s e 1s de comprimento n, e seja $f : B_n \to B_n$ a função "flipar o primeiro bit", i.e., dado $x \in B_n$ seja $f(x)$ a sequência que tem 0 na posição de índice 0 sse x tinha 1 nessa posição, e tal que $f(x)$ concorda com x em todas as outras posições.

Prove que f é uma bijeção.

b (3 pontos)**.** Sejam par, impar as funções de números naturais dadas por

$$\mathsf{par}(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é par,} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \mathsf{impar}(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Prove que

$$\left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ par}}}^{k} \binom{n}{i} \right) + \mathsf{impar}(k) \cdot \binom{n-1}{k} = \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ ímpar}}}^{k} \binom{n}{i} \right) + \mathsf{par}(k) \cdot \binom{n-1}{k}$$

c (2 pontos)**.** Prove que

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$$