



Matemática Discreta 2024-2

Prova 2

10 de dezembro de 2024

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Nessa prova, grafos são simples (finitos, não direcionados, cada aresta liga dois vértices distintos, e entre cada par de vértices há 0 ou 1 aresta)

Questão 1 (2 pontos). Seja G um grafo com $n \geq 2$ vértices.

Prove que em G há pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

Questão 2. Dado grafo G , seja $\text{prisma}(G)$ o grafo obtido da seguinte forma:

- comece com G
- adicione uma nova cópia G' de G , sem vértices em comum com G
- adicione uma aresta entre cada vértice de G e seu vértice correspondente (ou seja, sua cópia) em G'

Sejam $\text{Cubo}(0)$, $\text{Cubo}(1)$, $\text{Cubo}(2)$, ... os (infinitos) grafos definidos pela seguinte recursão:

$$\text{Cubo}(n) = \begin{cases} \text{grafo com 1 vértice,} & \text{se } n = 0 \\ \text{prisma}(\text{Cubo}(n-1)), & \text{c.c.} \end{cases}$$

a (2,5 pontos). Escreva relações de recorrência lineares para os números de vértices e de arestas de $\text{Cubo}(n)$, ambos como funções de n , mas sem “chamar” nenhuma dessas duas funções dentro da definição da outra.

b (2,5 pontos). Sendo $3^2 \cdot 3607 \cdot 3803$ a fatoração em primos de 123456789, dê a fatoração em primos da quantidade de arestas de $\text{Cubo}(123456789)$.

c (2 pontos). Para quais $n \in \mathbb{N}$ existe uma trilha Euleriana fechada no grafo $\text{Cubo}(n)$? *Lembrete: trilha Euleriana* é um passeio que passa por cada aresta do grafo exatamente 1 vez.

d (1 ponto). Prove que para todo grafo G , se G tem um caminho Hamiltoniano então $\text{prisma}(G)$ também tem. *Lembrete: caminho Hamiltoniano* é um caminho que passa por cada vértice do grafo exatamente 1 vez.

e (1 ponto). Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ o grafo $\text{Cubo}(n)$ tem um caminho Hamiltoniano.