INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Matemática Discreta 2024-2

Segunda Chamada da Prova 2

17 de dezembro de 2024

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Nessa prova, grafos são simples (finitos, não direcionados, cada aresta liga dois vértices distintos, e entre cada par de vértices há 0 ou 1 aresta)

Questão 1 (2,5 pontos)**.** Dê definições por recorrência linear para as funções de naturais F e G, sendo F com recorrência linear homogênea e G não, sabendo que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$F(n) = G(n) = 4 \cdot (-2)^n + 3 \cdot 5^n + 6$$

Questão 2 (2,5 pontos)**.** Encontre a forma fechada da função definida pela seguinte recorrência:

$$F(n) = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \\ 8 \cdot F(n-1) - 12 \cdot F(n-2) - 8 \cdot 2^n, & \text{c.c.} \end{cases}$$

A sua solução pode usar "resolva o sistema de equações tal" como uma caixa preta, i.e., a sua resposta pode ser dada na forma "… onde c_0, c_1, …, c_k são as soluções do sistema …" (em outras palavras, você não precisa de fato resolver nenhum sistema de equações que encontrar).

Questão 3.

Lembrete: uma *árvore geradora* de um grafo G é um subgrafo de G que é uma árvore e que contém todos os vértices de G.

a (2 pontos)**.** Prove que toda aresta de um grafo conexo pertence a pelo menos uma árvore geradora daquele grafo.

b (2 pontos)**.**

Definição. Uma aresta de um grafo conexo G é uma *ponte* se a retirada dessa aresta torna o grafo resultante desconexo.

Seja G um grafo conexo e e uma aresta de G. Prove que e está em **todas** as árvores geradoras de G se, e somente se, e é uma ponte.

c (2 pontos)**.** Seja G um grafo conexo. Prove que G tem exatamente 1 árvore geradora se, e somente, G for uma árvore.