INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Matemática Discreta 2024-2

Prova 3

12 de dezembro de 2024

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Nessa prova, grafos são simples (finitos, não direcionados, cada aresta liga dois vértices distintos, e entre cada par de vértices há 0 ou 1 aresta)

Questão 1. Seja $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função tal que $Z(n)$ é a quantidade de sequências binárias (i.e., compostas por 0s e 1s) de comprimento n nas quais não aparecem 0s consecutivos.

a. Escreva uma relação de recorrência para essa função Z. *Atenção*! Não confunda "a sequência vazia" com "a ausência de sequências"!

b. Qual das expressões abaixo indica o número de sequências binárias de comprimento 100 nas quais não aparecem 0s consecutivos? Respostas sem desenvolvimento não serão aceitas.

A) $\dfrac{(\sqrt{5}+3)\varphi^{100} + (\sqrt{5}-3)\psi^{100}}{2\sqrt{5}}$, onde $\varphi > \psi$ são as raízes de $x^2 = x + 1$

B) $2^{100} - \displaystyle\sum_{i=1}^{100} (-1)^{i+1} \binom{100}{i}$

C) $2 \cdot \dfrac{\varphi^{100} - \psi^{100}}{\sqrt{5}}$, onde $\varphi > \psi$ são as raízes de $x^2 = x + 1$

D) $\dfrac{(\sqrt{5}+3)\varphi^{100} + (\sqrt{5}-3)\psi^{100}}{2\sqrt{5}}$, onde $\varphi > \psi$ são as raízes de $x^2 = x + 1$

E) Nenhuma das anteriores

Questão 2. Prove que todo número natural pode ser escrito como a soma de números de Fibonacci, sem que nessa soma seja preciso repetir nenhum número de Fibonacci nem usar dois números que sejam consecutivos na sequência de Fibonacci.

(Por exemplo: $10 = 2 + 8 = \text{fibo}(3) + \text{fibo}(6)$, $50 = 3 + 13 + 34 = \text{fibo}(4) + \text{fibo}(7) + \text{fibo}(9)$, etc.)

Dica: Indução... Dado um número $n > 0$, olhe para o maior número de Fibonacci $\text{fibo}(k)$ tal que $\text{fibo}(k) \leqslant n$, e considere a distância $\ell = n - \text{fibo}(k)$. Note que $n = \ell + \text{fibo}(k)$...

Questão 3.

Definição 1. Um caminho em um grafo G é chamado

- *máximo* se tem o maior comprimento dentre todos os caminhos em G
- *maximal* se não está contido em nenhum outro caminho em G

a. Prove que todo caminho máximo é maximal, mas que a recíproca não é válida.

b. Prove que em um grafo conexo cada par de caminhos máximos tem pelo menos um vértice em comum, mas que o mesmo não é necessariamente verdade para caminhos maximais.

Dica: Sejam P, P' caminhos em G de mesmo comprimento ℓ sem nenhum vértice em comum. De cada ponta de P existem caminhos para cada ponta de P'. Como P e P' não têm vértices em comum, um caminho desses deve "cruzar" de P para P' em algum momento. Use isso para exibir algum caminho de comprimento maior do que ℓ.