INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica & Computabilidade 2024-2

Prova 1 (segunda chamada)

13 de dezembro de 2024

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Ao longo dessa prova, sempre que quiser, você pode assumir que os conectivos da Lógica de Conectivos são apenas $\{\neg, \wedge\}$.

Justifique todas as suas respostas!

Questão 1 (3 pontos)**.** Duas pessoas estão conversando: uma delas está de camisa branca, a outra de camisa preta. Você sabe que uma é torcedora (apenas) do Flamengo e a outra (apenas) do Fluminense, mas não sabe quem é quem. A pessoa de camisa branca fala "eu sou flamenguista", e a pessoa de camisa preta fala "eu sou tricolor". Suponha que você tenha conseguido, de alguma maneira, descobrir corretamente que pelo menos uma delas está mentindo.

Modele essa situação usando a lógica de conectivos e prove, usando uma árvore de avaliação, que nesse caso ambas estão mentindo.

Questão 2. Sejam $\not\to$ e $\not\leftrightarrow$ os conectivos que são as versões "negadas" dos conectivos usuais $\to$ e $\leftrightarrow$, i.e.,

α	β	$\alpha \not\to \beta$	$\alpha \not\leftrightarrow \beta$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	F	F

a (2 pontos)**.** Prove que $\{\wedge, \vee, \not\to, \not\leftrightarrow\}$ não é um conjunto de conectivos completo.

Dica: na lista de exercícios, nós vimos que um certo conjunto de conectivos não era completo porque ele satisfazia um teorema do tipo "pra toda fórmula usando apenas esses conectivos, supor que todos os seus símbolos proposicionais são V em um contexto implica que a fórmula também é V no mesmo contexto", ou em outras palavras, "a primeira linha da tabela verdade de qualquer fórmula é V".

b (2 pontos)**.** Prove que $\{\neg, \not\to\}$ é completo.

Questão 3 (3 pontos).

Definição. Um conjunto Σ de fórmulas é dito

- *consistente* se não tem como consequência sintática nenhuma fórmula contraditória (falsa em todos os contextos), i.e., se para toda fórmula contraditória φ temos

$$\Sigma \nvdash \varphi$$

- *cheio* se para toda fórmula φ da LC temos $\varphi \in \Sigma$ ou $(\neg\varphi) \in \Sigma$.

Assuma (sem prova) o seguinte resultado.

Teorema (Lema de Lindenbaum). *Se Σ é um conjunto consistente de fórmulas, então Σ está contido em algum conjunto de fórmulas que é consistente e cheio.*

Prove que, se Σ é consistente, então Σ é satisfazível (i.e., existe algum contexto que satisfaz todas as fórmulas de Σ).

Sua resposta ganhará um bônus de até 1 ponto se **não usar** os Teoremas de Corretude e Completude da LPO.

Dica: pelo Lema de Lindenbaum, Σ está contido em algum conjunto Δ que é consistente e cheio. Use a "cheiura" (e a consistência) de Δ para definir um contexto que satisfaz todo o Δ, e portanto também todo o Σ.