



Lógica & Computabilidade 2024-2

Prova 2

11 de dezembro de 2024

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Justifique todas as suas respostas!

Questão 1.

Definição. Dizemos que uma fórmula φ da LPO está em *Forma Normal Prenex* (FNP) se

- φ não tem ocorrências de quantificadores; ou
- φ é $(Qx.\psi)$ para algum $Q \in \{\exists, \forall\}$, alguma variável x e alguma fórmula ψ que está em FNP.

Em outras palavras, $\langle \text{FNP} \rangle :=$

$$\begin{aligned} &\langle \text{fórmula sem quantificadores} \rangle \\ &| (\exists x. \langle \text{FNP} \rangle) \\ &| (\forall x. \langle \text{FNP} \rangle) \end{aligned}$$

a (2,5 pontos). Prove que se x não ocorre livre em ψ , então para qualquer $Q \in \{0, 1\}$:

$$(Qx.\varphi) \wedge \psi \quad \text{e} \quad Qx.(\varphi \wedge \psi)$$

são equivalentes (semanticamente ou sintaticamente, você escolhe).

b (2,5 pontos). Prove que toda fórmula da LPO (em qualquer assinatura) é equivalente a uma fórmula da mesma assinatura, mas que está em FNP.
Lembrete: você pode assumir que os únicos conectivos são $\{\neg, \wedge\}$.

Questão 2.

Definição. Dizemos que uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ é *co-recursivamente enumerável* (*co-R.E.*) se existe uma MT M tal que

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ aceita } w \text{ ou a execução de } M \text{ em } w \text{ não termina}\}.$$

a (2,5 pontos). Prove que uma linguagem é decidível se, e somente se, ela é ambos recursivamente enumerável e co-recursivamente enumerável

b (2,5 pontos). Prove que a seguinte linguagem é recursivamente enumerável mas não é co-recursivamente enumerável:

$$L = \{c \in \{0, 1\}^* \mid c \text{ codifica uma MT que aceita alguma entrada}\}.$$